2. Brownin liike

2.1. Yksinkertainen satunnaiskulku eli stokastinen differenssiyhtälö. Voimme nyt aloittaa kurssin pääsisällön, eli stokastisten prosesien ja differentiaaliyhtälöiden matemaattisemman tarkastelun.

Palaamme ensin ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöön

$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

Leibnizin merkinnällä differentiaaliyhtälö kirjoitettiin

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = F(x, f(x)).$$

ja muistamme, että differentiaaliyhtälön olevan läheistä sukua *differenssiyhtälölle*

$$\frac{\nabla_+ f(x_k)}{\nabla_+ x_k} =: \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = F(x_k, f(x_k))$$

missä $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leq b$, lähisukulaisena ja $\nabla_+ a_k := a_{k+1} - a_k$ oli (a_k) mikä hyvänsä lukujono.

Differentiaaliyhtälöä voidaankin usein *approksimoida* differenssiyhtälöllä ja päinvastoin. Differenssiyhtälöiden mukava puoli on siinä, että ne eivät sisällä raja-arvoja. Niitä voidaan siten käsitellä elementaarimenetelmillä ja jos approksimointimenetelmä toimii, niiden avulla voidaan saada tietoa vastaavista differentiaaliyhtälöistä. Niiden huono puoli on siinä, että niiden ratkaisut ovat usein varsin hankala kirjoittaa yksinkertaisten perusfunktioiden avulla. Nämä johtuvat usein kombinatorisista ja lukuteoreettisista syistä. Kun differenssien pituus lähestyy nollaa, monet ratkaisut on kirjoitettavissa helpommin asymptoottisesti. Rajalla ratkaisut voivat olla varsin elegantteja. Tämä on differentiaaliyhtälöiden ja analyysin tehokkuuden syy yleisestikin.

Palaamme nyt hyvin yksinkertaiseen differentiaaliyhtälöön

$$f'(x) = g(x), \text{ kun } x \in (0, 1).$$

Tämän yksinkertaisin differenssivastine on

$$f(k+1)h) - f(kh) = g(kh)((k+1)h - kh) = g(kh)h$$

kun oletamme, että *diskretointi* tapahtuu tasavälein $x_k = kh$, ja h on jokin pieni positiivinen luku. Tämän differenssiyhtälön ratkaisu saadaan summaamalla

$$f(kh) = f(0) + \sum_j g(jh)h[\,0 \leq j < k\,].$$

Muutamme nyt tämän yksinkertaisen differenssiyhtälön stokastiseksi korvaamalla termin $f(kh)$ satunnaismuuttujalla $X_{kh}^{(h)}$ ja termin $g(kh)h$ hieman merkillisesti kirjoitetulla satunnaismuuttujalla $\sqrt{h}\widehat{B}_k$, missä satunnaismuuttujat

$\{\widehat{B}_1, \widehat{B}_2, \dots\}$ ovat keskenään riippumattomia ja samoin jakautuneita ja niiden jakauma toteuttaa

$$\mathbf{P}\left(\widehat{B}_1 = 1\right) = \mathbf{P}\left(\widehat{B}_1 = -1\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Näin saadun differenssiyhtälön

$$\nabla_+^{(h)} X_{hk}^{(h)} = \sqrt{h}\widehat{B}_k =: \nabla_+ B_{h,k}$$

ratkaisu on

$$X_{hk}^{(h)} = X_0 + \sqrt{h} \sum_{0 \le j < k} \widehat{B}_j = X_0 + \sum_{0 \le j < k} \nabla B_{h,j}.$$

Oikean puolen viimeinen termi näyttää hieman Riemannin–Stieltjesin summalta, joten heuristisesti viemällä $h \to 0^+$, mutta valitsemalla k siten, että $hk \to t$, niin tämä summa näyttäisi seuraavalta "integraalilta"

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mathrm{d}B_s = X_0 + B_t$$

jos "integraali" tottelisi tuttuja laskusääntöjä.

Itse asiassa on voimassa seuraavanlainen tulos.

Lause (Donskerin lause)**.** *Olkoon tarkasteluväli* $[0, 1]$ *ja* B *Brownin liike tällä välillä. Jos määrittelemme* $B_h(t) = X_{hk}^{(h)}$ *kun* $t = hk$ *ja täydennämme välit lineaarisesti, niin* $B_h \to B$ *heikosti jatkuvien funktioiden avaruudessa sopivan metriikan suhteen. Erityisesti stokastisten prosessien* B_h *äärelliset marginaalit suppenenevat heikosti kohti Brownin liikkeen äärellisiä marginaaleja.*

Todistus. Todistus sivuutetaan, sillä jopa väitteen tarkka muotoilu vaatisi lisää esitietoja. □

Sen sijaan, että murehdimme lauseen todistamista, voimme käyttää sitä apuvälineenä Brownin liikkeen ominaisuuksien tutkimisessa.

Ensimmäinen tieto, minkä saamme Brownin liikkeestä on

2.1. **Lemma.** *Brownin liikkeen lisäykset ovat riippumattomia eli jos* $t_1 < t_2 < \dots < t_n$*, niin* $\{B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})\}$ *on riippumaton perhe satunnaismuuttujia.*

Todistus. Olkoon $h > 0$ niin pieni, että $h \ll \min\{t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}\}$. Olkoon $k_j = \lfloor t_j/h \rfloor$ kun $j = 1, \dots, n$, missä käytämme merkintää $\lfloor x \rfloor := k \in \mathbb{Z}$ ja $k \le x < k + 1$. Nyt määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(X_{hk_1} \in A_1, X_{hk_2} - X_{hk_1} \in A_2 \dots, X_{hk_n} - X_{hk_{n-1}}\right) \\
&\quad = \mathbf{P}\left(X_{hk_1} \in A_1\right) \prod_{j=2}^{n} \mathbf{P}\left(X_{hk_j} - X_{hk_{j-1}} \in A_j\right)
\end{aligned}$$

Kun $h \to 0^+$, niin Donskerin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} - B_{t_1} \in A_2 \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \right) \\
&= \mathbf{P}\left(B_{t_1} \in A_1 \right) \prod_{j=2}^{n} \mathbf{P}\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \in A_j \right).
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa väitteen. □

Keskeisen raja-arvolauseen avulla havaitsemme, että Brownin liikkeen jakauma hetkellä $t > 0$ on normaalijakautunut.

2.2. **Lemma.** *Satunnaismuuttja* $B_t \sim \mathfrak{N}(0,t)$ *kun* $t > 0$.

Todistus. Olkoon $h_n = t2^{-n}$ ja merkitään $N = 2^n$. Tällöin $B_{h_n}(t) = X_{2^n h_n}$ ja siis

$$B_{h_n}(t) = \sqrt{h_n} \sum_{0 \le k < 2^n} \widehat{B}_k = \sqrt{t}\Big(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{0 \le k < N} \widehat{B}_k \Big) =: \sqrt{t} S_N.$$

Koska $\{\widehat{B}_k\}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, niin keskeisen raja-arvolauseen mukaan $S_N \to S_\infty$ heikosti, missä $S_\infty \sim \mathfrak{N}(\mathbf{E}\,\widehat{B}_1\,, \mathbf{V}\,\widehat{B}_1\,)$. Donskerin lauseen nojalla tiedämme myös, että $B_{h_n}(t) = \sqrt{t} S_N \to B(t)$ heikosti, joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $B(t) \sim \sqrt{t} S_\infty$.

Enää laskemme odotusarvon ja varianssin, joten $\mathbf{E}\,\widehat{B}_1 \, = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ja $\mathbf{V}\,\widehat{B}_1 \, = \mathbf{E}\,\widehat{B}_1^2 \, = \mathbf{E}\,1 \, = 1$. Tämä osoittaa väitteen. □

Seuraavaksi voimme päätellä, että Brownin liikkeellä on *stationaariset lisäykset.* Tämä on seurausta seuraavasta lemmasta.

2.3. **Lemma.** *Jokaisella* $s > 0$, *stokastinen prosessi* $X(t) := B(t+s) - B(s)$ *on Brownin liike.*

Todistus. Helppo harjoitustehtävä. □

Näiden tietojen avulla voimme päätellä, että Brownin liike on oikeasti olemassa! Tämä on aika merkittävä edistysaskel, sillä vaikka olemmekin puhuneet Brownin liikkeestä implisiittisesti Donskerin lauseen välityksellä, olemme osoittaneet, että voimme konstruoida *äärellisen* monella $t_1 < \cdots < t_n$ satunnaismuuttujan $(B_h(t_1), \dots, B_h(t_n))$, mikä suppenee heikosti kohti jotain satunnaismuuttujaa $(B(t_1), \dots, B(t_n))$. Voimme siis rakentaa stokastiset prosessit

$$(B(t); t \in T_F) \quad T_F \subset \mathbb{R}_+ \text{ on } \textit{äärellinen joukko}.$$

Andrey Nikolaevich Kolmogorovin laajennuslause kertoo, että tämä riittää prosessin olemassaolon takaamiseen.

Lause (Kolmogorovin laajennuslause)**.** *Olkoon T jokin aikajoukko. Tällöin prosessi $(X(t); t \in T)$ on olemassa jos ja vain jos jokaisella* äärellisellä joukolla *$T_F \subset T$ stokastinen prosessi $(X(t); t \in T_F)$ on olemassa.*

Todistus. Tämän todistus sivuutetaan. □

Siispä Kolmogorovin laajennuslauseen mukaan Brownin liike on olemassa. Toisaalta tiedämme jo, että yleisesti stokastisen prosessin polut voivat olla hyvin huonosti käyttäytyviä. Brownin liikeelläkin polut ovat ”ryppyiset”, mutta varsin säännölliset. Ne ovat nimittäin jatkuvia. Tämä on seurausta toisesta Kolmogorovin lauseesta eli Kolmogorovin jatkuvuuslauseesta, josta esitämme seuraavassa hyvin voimakkaasti yksinkertaisen version, joka tosin riittää meille mainiosti.

Lause (Kolmogorovin jatkuvuuslause)**.** *Oletetaan, että tilajoukko $S \subset \mathbb{R}^d$ on avoin tai suljettu, aikajoukko $T = [a, b]$ jokin suljettu väli. Olkoon $(X(t); t \in T)$ stokastinen prosessi. Jos löytyy sellaiset* aidosti positiiviset *vakiot α, β ja γ, että*

$$\mathbf{E}\,|X(t) - X(s)|^{\alpha} \le \gamma |t - s|^{1+\beta},$$

niin prosessilla $(X(t))$ on versio *$(\widetilde{X}(t))$, jonka melkein kaikki polut toteuttavat ehdon*

$$|\widetilde{X}(t) - \widetilde{X}(s)| \le C|t - s|^{r/\alpha}$$

jokaisella $t, s \in [a, b]$, jokaisella $r \in (0, \beta)$. Edelleen, jos X on jatkuva prosessi, niin X itse toteuttaa yllä olevan Hölderin ehdon.

Todistus. Sivuutetaan. □

Tämän avulla voimme osoittaa, että Brownin liike on jatkuva.

2.4. **Lause.** *Brownin liikkeellä $B(t)$ on jatkuva versio. Tarkemmin, Brownin liikkeen jatkuva versio on lokaalisti Hölderin jatkuva Hölderin eksponentilla $\lambda < \frac{1}{2}$.*

Todistus. Osoitamme tästä osan ja jätämme loput harjoitustehtäväksi.

Tiedämme, että $B(t) - B(s) \sim B(t - s)$ ja tiedämme, että

$$\mathbf{V}\,B(t - s) = \mathbf{E}\,B(t - s)^2 = |t - s|$$

Tämä antaa Kolmogorovin jatkuvuuslauseen vakioiksi $\alpha = 2$, $\beta = 0$ ja $\gamma = 1$. Tämä ei vielä kerro yhtään mitään, sillä tarvitsemme, että $\beta > 0$. Koska $X = B(t - s)$ on Gaussinen satunnaismuuttuja, osaamme laskea sen kaikki momentit. Esimerkiksi tiedämme, että

$$\mathbf{E}\,X^4 = 3(\mathbf{V}\,X)^2 = 3|t - s|^2,$$

joten nyt $\alpha = 4$, $\beta = 1$ ja $\gamma = 3$. Siispä voimme päätellä, että Brownin liikkeen jokin versio $(\widetilde{B}(t))$ on lokaalisti Hölderin jatkuva eksponentilla $\lambda < \beta/\alpha = 1/4$.

Laskemalla korkeampia momentteja, voidaan eksponenttia parantaa aina arvonn $\frac{1}{2}$ asti. Tämä jää harjoitustehtäväksi. $\square$

Olemme nyt todenneet, että Brownin liike on varsin mukavasti käyttäytyvä tai ainakin sillä on jokin mukavasti käyttäytyvä versio, joten on mielekästä ja järkevää *määritellä* Brownin liike sen parhaiten käyttäyväksi versiokseen.

2.5. **Määritelmä.** Brownin liike $(B(t); t \geq 0)$ on jatkuva Gaussinen prosessi, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $\mathbf{E}\, B(t) = 0$ ja $\mathbf{V}\, B(t) = t$ jokaisella $t \geq 0$
(2) jos $t_1 < \cdots < t_n$ ja $h > 0$, niin satunnaismuuttujan
$$(B(t_2 + h) - B(t_1 + h), \ldots, B(t_n + h) - B(t_{n-1} + h))$$
jakauma ei riipu parametrin h arvosta.
(3) jos $t_1 < \cdots < t_n$, niin satunnaismuuttujat $\{B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})\}$ ovat riippumattomia.

Brownin liikkeen ominaisuutta (2) kutsutaan *stationaarisiksi lisäyksiksi* ja ominaisuutta (3) kutsutaan *riippumattomiksi lisäyksiksi*. Määrittelemme vielä useampiulotteisen Brownin liikkeen, jonka olemassaolon ja ominaisuudet on helppo päätellä (1-ulotteisen) Brownin liikkeen olemassolosta ja ominaisuuksista.

2.6. **Määritelmä.** Olkoon $d \in \mathbb{N}_+$. d-ulotteinen Brownin liike $(B(t); t \geq 0) = ((B^{(1)}(t), \ldots, B^{(d)}(t)); t \geq 0)$ on jatkuva d-ulotteinen Gaussinen prosessi, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) jokaisella $j = 1, \ldots, d$ koordinaattiprosessi $B^{(j)}$ on Brownin liike
(2) prosessit $B^{(j)} \perp\!\!\!\perp B^{(k)}$ kun $j \neq k$.

2.2. **Reuna-arvotehtävä ja Brownin liikkeen reuna-arvot.** Stokastisten prosessien kurssilla käsiteltiin seuraavaa esimerkkiä.

2.7. **Esimerkki** (Rahapeli)**.** Kaksi pelaajaa pelaavat jotakin kahden hengen peliä, jossa pelaajan A voittotodennäköisyys on p ja pelaajan B voittotodennäköisyys on $q = 1 - p$.

Kun pelaaja A voittaa, pelaaja B maksaa hänelle yhden euron. Vastaavasti pelaajan A hävitessä, pelaaja B saa yhden euron pelaajalta A. Peli jatkuu, kunnes pelaaja A häviää kaikki rahansa tai voittaa d euroa (esim. pelaajan B kaikki rahat). Ongelmana on selvittää, millä todennäköisyydellä pelaaja A häviää ?

Jotta saisimme tämän esimerkin yhteyden ja Brownin liikkeen välisen yhteyden selvemmäksi, määrittelemme lyhyesti Markovin ketjun sekä tarvittavan käsitteistön. Tulemme hetken päästä yleistämään nämä tarvitsemaamme yleisyyteen.

2.8. **Määritelmä.** Olkoon $T = \mathbb{N}$ ja S numeroituva joukko. Stokastinen prosessi (X_n) on aikastationaarinen *Markovin ketju* , jos kaikilla ajanhetkillä n, m ja tiloilla $i, j \in S$ on voimassa

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \,|\, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\,) \\ &= \mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \,|\, X_n = i\,) \end{aligned} \tag{2.9}$$

sekä lisäksi on voimassa *siirtymätodennäköisyyksille*

$$p_{ij} = \mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\,) = \mathbf{P}\,(\,X_{m+1} = j \,|\, X_m = i\,) \tag{2.10}$$

2.11. **Merkintä.** Kun Markovin ketju (X_n) lähtee tilasta i, niin merkitsemme

$$\mathbf{P}_i\,(\,A\,) := \mathbf{P}\,(\,A \,|\, X_0 = i\,)\,.$$

Rahapeli voidaan mallintaa satunnaiskulkuna äärellisellä välillä $S = \{0, 1, \dots, d\}$. Välin "reunapisteet" 0 ja d muodostavat niin sanotun *absorptiojoukon* $A = \{0, d\}$. Myös joukot $A' = \{0\}$ ja $A'' = \{d\}$ ovat absorptiojoukkoja.

2.12. **Määritelmä.** Olkoon $A \subset S$. Joukko A on *absorptiojoukko*, jos $p_{ij} = 0$ aina, kun $i \in A$ ja $j \in A^C$.

Kysymykseen vastaamiseen kurssilla käytettiin *absorptiohetken* käsitettä.

2.13. **Määritelmä.** *Absorptiohetki* τ_A on satunnainen ajanhetki

$$\tau_A := \min\{\, n \in \mathbb{N} : \; X_n \in A \,\}.$$

Lisäksi teemme sopimuksen, että $\min \emptyset = \infty$ eli $\tau_A = \infty$, jos $X_n \notin A$ jokaisella ajanhetkellä n.

Tämän absorptiohetken avulla voimme helposti esittää tapahtumat

$$\{\text{absorptio tapahtuu joskus}\} = \{T_A < \infty\} \quad \text{ja}$$

$$\{\text{absorptiota ei koskaan tapahdu}\} = \{T_A = \infty\}.$$

Tarkastelemme seuraavaksi kysymystä, millä todennäköisyydellä absorptio tapahtuu, jos lähdemme tilasta $i \in S$.

2.14. **Merkintä.** Absorptiotodennäköisyyttä lähtötilasta i merkitsemme

$$h_{iA} := \mathbf{P}_i\,(\,T_A < \infty\,)\,.$$

Jos absorptiojoukko $A = \{j\}$, niin merkitsemme $h_{ij} := h_{i\{j\}}$.

Nyt rahapelin kysymykseen vastaus on helppo muotoilla. Kysymys voidaan muotoilla: häviön todennäköisyys on h_{i0}, kun pelaajalla A on aluksi i euroa. Kurssilla Stokastiset prosessit tämä ongelma ratkaistiin SK-ketjujen (syntymä- ja kuolemaketjujen) tapauksessa. Mutta ennenkuin katsomme, mitä tuloksia ja vastauksia Stokastiset prosessit -kurssilla kysymykseen saatiin, mietitään, mitä tällä on tekemistä Brownin liikkeen kanssa.

Edellisessä osiossa tarkastelimme yksinkertaista satunnaiskulkua, jonka rajaprosessina saimme Brownin liikkeen. Nyt tämä yksinkertainen satunnaiskulku on MK ja tarkemmin vielä SK-ketju. Sanomme, että MK-ketju on *SK-ketju*, jos $S = \mathbb{Z}$ tai $S = \mathbb{N}$ tai $S = \{n, n+1, \ldots, m\}$ joillakin $n, m \in \mathbb{Z}$. Ja $p_{ij} = 0$ aina, kun $|i - j| \geq 2$.

2.15. **Lemma.** *Kun $h = 1$, niin yksinkertainen satunnaiskulku $(X_{hk}^{(h)}) = (X_k)$ on SK-ketju, jonka siirtymätodennäköisyydet $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Parametri h toimii sekä aikaskaalan että pituusskaalan vaihtajana. Jos $h \neq 1$, niin $(\widehat{X}_k) := (X_{hk}^{(h)}/\sqrt{h})$ on SK-ketju, joka käyttäytyy kuin (X_k). Rahapelion-gelma voidaan siten tulkita myös seuraavanlaisena kysymyksenä:

Ongelma. Oletetaan, että $h = 1/N^2$. Millä todennäköisyydellä yksinkertainen satunnaiskulku $X_{hk}^{(h)}$, joka lähtee välin $[0, 1]$ pisteestä $x := j/N$ *osuu* pisteeseen 0 ennen mahdollista osumista pisteeseen 1 ?

Jos skaalaamme parametrin h pois, niin ongelma on sama kuin

Ongelma. Millä todennäköisyydellä yksinkertainen satunnaiskulku X_k, joka lähtee joukon $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ pisteestä $xN = j$ *osuu* pisteeseen 0 ennen mahdollista osumista pisteeseen N ?

Voimme nyt lukea tarpeelliset tulokset ja vastaukset suoraan Stokastiset prosessit -kurssin Luvusta 2.

2.16. **Lause.** *Olkoon A jokin absorptiojoukko. Olkoon f_A pystyvektori,*

$$f_A = \begin{pmatrix} f_{0A} \\ f_{1A} \\ f_{2A} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Tällöin vektori f_A on harmoninen*, eli*

$$f_{iA} = \sum_{j \in S} p_{ij} f_{jA}, \quad i \in S$$

eli matriisimerkinnällä $f_A = Pf_A$*, kun* $P = (p_{ij})$ *on siirtymätodennäköisyysmatriisi. Lisäksi* $f_{iA} = 1$ *aina, kun* $i \in A$*. Ratkaisu on yksikäsitteinen siinä mielessä, että jos* f *on jokin yhtälön*

$$\begin{cases} Pf = f, \\ f_i = 1, \qquad \text{kun } i \in A \end{cases}$$

toinen ratkaisu, niin $f_i \geq f_{iA}$ *jokaisella* $i \in S$*.*

Jälkimmäinen ongelma saadaan siis ratkaisemalla reuna-arvotehtävä

$$\begin{cases} Pf = f, \\ f_0 = 1, f_N = 0 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on yksinkertaisesti $f_j = 1 - j/N$. Palauttamalla mukaan skaalaus saamme ensimmäisen ongelman ratkaisulle $f_h(x) := \mathbf{P}_x\,(\,\tau_0 < \infty\,) = 1 - x$. Käyttämällä hyväksi ongelman lineaarisuutta ja päätepisteiden tietynlaista symmetrisyyttä havaitsemme, että yleisen reuna-arvotehtävän

$$\begin{cases} Pf = f, \\ f(0) = a, f(N) = b \end{cases}$$

ratkaisu on

$$f(j) = a\mathbf{P}_j\,(\,\tau_0 < \tau_N < \infty\,) + b\mathbf{P}_j\,(\,\tau_N < \tau_0 < \infty\,)\,.$$

Tiedämme Stokastisen prosessien -kurssin tiedon nojalla, että $\tau_0, \tau_N < \infty$ varmasti, joten jätämme sen pois näkyvistä jatkossa. Kun otamme mukaan skaalaustekijän h ja merkitsemme etsittyä ratkaisua $f_h(x) = f(k\sqrt{h})$, kun $x = k\sqrt{h}$ ja skaalattua siirtymätodennäköisyysoperaattoria

$$P_h f_h(x) = \tfrac{1}{2}(f_h(x + \sqrt{h}) + f_h(x - \sqrt{h})),$$

niin ongelma vastaa reuna-arvotehtävän

$$\begin{cases} P_h f_h(x) = f_h(x), \qquad \text{kun } x \in (0,1) \\ f_h(0) = a, f_h(1) = b \end{cases}$$

ratkaisemista. Voimme kehittää tätä vielä hieman ja siirtää f_h termi oikealta puolelta vasemmalle. Jos vielä jaamme yhtälön luvulla h, niin saamme

$$\begin{cases} \triangle_h f_h(x) = 0, \quad \text{kun } x \in (0,1) \\ f_h(x) = g(x), \quad \text{kun } x = 0 \text{ tai } 1 \end{cases}$$

kunhan $g(0) = a$ ja $g(1) = b$. Tässä $\triangle_h$ on symmetrinen *diskreetti Laplacen operaattori.* Yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa apufunktion g ja odotusarvojen avulla seuraavasti. Tiedämme, että

$$f_h(x) = g(0)\mathbf{P}_x\,(\,\tau_0 < \tau_1\,) + g(1)\mathbf{P}_x\,(\,\tau_0 > \tau_1\,)$$

Jos $\tau = \tau_{\{0,1\}}$, niin $\tau = \tau_0 \wedge \tau_1$. Voimmekin kirjoittaa

$$f_h(x) = \mathbf{E}_x\,\big(g(0)[\,\tau = \tau_0\,] + g(1)[\,\tau = \tau_1\,]\big)\,.$$

Satunnaisella hetkellä τ_0 satunnaiskulku $(X_{hk}^{(h)})$ on varmasti kohdassa 0, joten $X_{\tau_0}^{(h)} = 0$ ja vastaavasti $X_{\tau_1}^{(h)} = 1$. Siispä

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \mathbf{E}_x\,\big(g(X_{\tau_0}^{(h)})[\,\tau = \tau_0\,] + g(X_{\tau_1}^{(h)})[\,\tau = \tau_1\,]\big) \\ &= \mathbf{E}_x\,\big(g(X_{\tau}^{(h)})[\,\tau = \tau_0\,] + g(X_{\tau}^{(h)})[\,\tau = \tau_1\,]\big) \;= \mathbf{E}_x\, g(X_{\tau}^{(h)})\,. \end{aligned}$$

Jos nyt muodollisesti annamme $h \to 0$, niin tämä differenssiyhtälö vastaa muodollisesti reuna-arvotehtävää differentiaaliyhtälölle

$$\begin{cases} f''(x) = 0, & \text{kun } x \in (0,1) \\ f(x) = g(x), & \text{kun } x = 0 \text{ tai } 1. \end{cases}$$

Jos edelleen muodollisesti luotamme siihen, että mitään rumaa ei voi sattua, niin tämän ratkaisun voisi olettaa olevan esitettävissä Brownin liikkeen avulla

$$f(x) = \mathbf{E}_x\, g(B_\tau)\,,$$

sillä Donskerin lauseen nojalla $X^{(h)} \to B$ heikosti. Tämä on tietenkin täysin heuristista arvailua, mutta yllättäen se kuitenkin pitää paikkaansa.

Tämän esimerkin mukana olemme törmänneet useisiin käsitteisiin, jotka haluamme yleistää Brownin liikkeen tilanteeseen.

2.3. **Korkeampiulotteinen reuna-arvotehtävä.** Ennenkuin palaamme ankaraan matemaattiseen analyysiin, jatkamme edellisen tarkastelun motivoimana seuraavaan esimerkkiin.

Oletetaan, että $G \subset \mathbb{R}^2$ on avoin ja yhtenäinen rajoitettu joukko eli alue. Olkoon Γ alueen G reuna ja olkoon $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Voimme kysyä: jos $B(t)$ on kaksiulotteinen Brownin liike, jonka lähetämme liikkeelle pisteestä $x \in G$, niin mitä on

$$u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau)\,,$$

kun $\tau = \inf\{\, t > 0 :\; B_t \notin G\,\}$?

Koska meillä ei ole vielä edes riittävästi käsitteitä määriteltynä, jotta voisimme vastata tähän ongelmaan, niin käytämme yksikertaista kaksiulotteista satunnaiskulkua $(X_h(t)) = (X_h^{(1)}(t), X_h^{(2)}(t))$ lähestymiseen.

Oletamme seuraavaksi yksikertaisuuden vuoksi, että $G = (0,1) \times (0,1)$. Tällöin valitsemme $h = 1/N^2$ ja määrittelemme satunnaiskulun SK-ketjun yleistyksenä siten, että molemmat satunnaiskulut $(X_h^{(1)}(t))$ ja $(X_h^{(2)}(t))$ ovat yksiulotteisia satunnaiskulkuja ja lisäksi ne ovat riippumattomia. Voimme siten tarkastella seuraavaa ongelmaa.

Ongelma. Määrää $u_h(x) = \mathbf{E}_x\, f(X_h(\tau))$, kun $x \in [0,1] \times [0,1]$ ja $x/\sqrt{h} \in \mathbb{N}^2$. Tässä $\tau = \min\{\, t \geq 0 : \ X_h(t) \notin G \,\}$.

Oikeastaan ainoa mitä tiedämme satunnaiskulun käytöksestä, on sen lokaali käytös. Suurimman osan ajasta prosessi kulkee alueen sisällä ja tällä hetkellä meillä ei ole mitään tietoa siitä, missä se kulkee. Ratkaisemme tämän ongelman seuraavasti.

Oletetaan, että $w \in C^2(G)$ on reaaliarvoinen funktio, jonka reuna-arvot ovat f. Jos asetamme $Z(t) = w(X_h(t))$, niin $Z(t)$ on reaaliarvoinen stokastinen prosessi, joka mittaa annetun funktion w mukaisesti, missä stokastinen prosessi $X_h(t)$ kulkee. Tämä antaa tarvittavan tiedon siitä, missä alkuperäinen prosessi liikkuu ennen osumista reunaan Γ.

Jos lähetämme satunnaiskulun X_h liikkeelle pisteestä $x \in G$, niin prosessi Z lähtee liikkeelle pisteestä $w(x)$. Edelleen osumishetkellä τ, stokastinen prosessi $Z(\tau) = w(X_h(\tau)) = f(X_h(\tau))$. Kysytty funktio $u_h(x)$ saadaan siten myös odotusarvona

$$u_h(x) = \mathbf{E}_x\, Z(\tau)\,.$$

Mitä olemme saavuttaneet tällä ? Ainakin sen, että funktio w on varsin vapaasti valittavissa. Stokastiseen prosessiin $Z(t)$ voimme nimittäin käyttää analyysin peruslauseen vastinetta, eli kirjoittaa

$$Z(t) - Z(0) = \sum_k (Z(hk+h) - Z(hk))[\,0 \leq hk < t\,]$$

Nyt osumishetkellä

$$Z(\tau) - Z(0) = \sum_k (Z(hk+h) - Z(hk))[\,0 \leq hk < \tau\,],$$

joten ottamalla odotusarvot puolittain

$$\mathbf{E}_x\, Z(\tau) \, - \mathbf{E}_x\, Z(0) \, = \sum_{k \geq 0} \mathbf{E}_x \big((Z(hk+h) - Z(hk))[\,k < \tau/h\,]\big)\,.$$

Vasen puoli on nyt suoraan laskettavissa ja on $u(x) - w(x)$. Temppu onkin yrittää valita funktio w eli stokastinen prosessi Z siten, että oikea puoli häviää. Tällöin $u_h(x) = w(x)$ ja olemme löytäneet haetun vastauksen.

Osoitamme seuraavaksi, että $(Z(t))$ toteuttaa *lähes* stokastisen differenssiyhtälön

$$\begin{aligned}\nabla_+ Z(t) &\approx Dw(X_h(t)) \cdot \nabla_+ X_h(t) + \partial_1\partial_2 w(X_h(t))\nabla_+ X_h^{(1)}(t)\nabla_+ X_h^{(2)}(t) \\ &\quad + h\triangle w(X_h(t)) + \mathrm{o}(h).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Tässä käytimme merkintää $Dw(x) = (\partial_1 w(x), \partial_2 w(x))$ funktion *gradientille*, sekä merkitsimme $\nabla_+ := \nabla_+^{(h)}$. Edelleen merkitsimme $x \cdot y$ tarkoittamaan kahden vektorin *pistetuloa* eli *sisätuloa*. Jos nyt w toteuttaa ehdon $\triangle w(x) = 0$ koko alueessa G, niin

$$\nabla_+ Z(t) \approx Dw(X_h(t)) \cdot \nabla_+ X_h(t) + \partial_1\partial_2 w(X_h(t))\nabla_+ X_h^{(1)}(t)\nabla_+ X_h^{(2)}(t) + \mathrm{o}(h)$$

Voimme tämän avulla osoittaa, että

$$\sum_{t\geq 0} \mathbf{E}_x \left(\nabla_+ Z(t)[\, t < \tau\,]\right) \approx \mathbf{E}_x\, \mathrm{o}(\tau) = \mathrm{o}(1) \tag{2.18}$$

joten $u_h(x) - w(x) = \mathrm{o}(1)$. Itse asiassa pystyisimme huomattavasti parempaan, mutta tämä on jatkon kannalta varsin riittävää, sillä tarkoituksena on tutustua stokastisiin differentiaaliyhtälöihin eikä differensseihin.

Osoitamme ensin likimääräisen kaavan (2.17).

2.19. **Lemma.** *Kun $w \in C^2(G)$ ja $\tau > t$, niin kaava* (2.17) *on voimassa.*

Todistus. Selkeyden vuoksi merkitsemme seuraavassa $X =: X_h$, $Y := X(t)$ ja edelleen $X_j =: X_h^{(j)}$. Nyt määritelmän mukaan

$$\nabla_+ Z(t) = Z(t+h) - Z(t) = w\big(X(t+h)\big) - w\big(X(t)\big).$$

Koska $t < \tau$ ja siten $t + h \leq \tau$, niin $X(t) \in G$ ja $X(t+h) \in \overline{G}$. Voimme siten soveltaa Taylorin kaavaa ja siis

$$\begin{aligned}\nabla_+ Z(t) &\approx \partial_1 w(Y)\nabla_+ X_1(t) + \partial_2 w(Y)\nabla_+ X_2(t) \\ &\quad + \partial_1\partial_2 w(Y)\nabla_+ X_1(t)\nabla_+ X_2(t) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Big(\partial_1^2 w(Y)\big(\nabla_+ X_1(t)\big)^2 + \partial_1^2 w(Y)\big(\nabla_+ X_1(t)\big)^2\Big) + \mathrm{o}(|\nabla_+ X(t)|^2)\end{aligned}$$

Koska $\nabla_+ X_j(t) = \pm\sqrt{h}$, niin $(\nabla_+ X_j(t))^2 = h$. Siispä edellä olevan kaavan alin rivi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tfrac{1}{2}\left(\partial_1^2 w(Y)h + \partial_1^2 w(Y)h\right) + \mathrm{o}(h) = \tfrac{1}{2}\triangle w(Y)h + \mathrm{o}(h).$$

Tämä osoittaakin kaavan (2.17). □

Seuraavaksi osoitamme, että

2.20. **Lemma.** *Kaikilla* $t \geq 0$ *on voimassa*

$$W := \mathbf{E}_x\Big([\,t < \tau\,]\partial_j w(Y)\nabla_+ X_h^{(j)}(t) \,|\, \mathscr{H}_t\Big) =: \mathbf{E}_x(V \,|\, \mathscr{H}_t) = 0.$$

Erityisesti $\mathbf{E}_x\, V = 0$.

Tässä käytämme Stokastiset prossessit -kurssilla Markovin ketjujen yhteydessä vastaan tullutta *historian* $\mathscr{H}_t$ käsitettä. Stokastisen prosessin X historia $\mathscr{H}_t$ on satunnaismuuttujien $\{\, X_h(s) : \; s \leq t \,\}$ virittämä σ-algebra. Tähän historian käsitetteeseen palaamme jatkossa usein, sillä se on yksi tärkeimmistä työvälineistämme.

Todistus. Koska $Y = X_h(t)$, niin satunnaismuuttuja $\partial_j w(Y)$ on $\mathscr{H}_t$-mitallinen, joten

$$W = \partial_j w(Y)\mathbf{E}_x\Big([\,t < \tau\,]\nabla_+ X_h^{(j)}(t) \,|\, \mathscr{H}_t\Big) \; .$$

Koska voimme ajan hetkellä t kertoa, olemmeko poistuneet ajanhetkeen mennessä alueesta G, niin $\{t \geq \tau\} \in \mathscr{H}_t$ (HT). Siispä myös satunnaismuuttuja $[\,t < \tau\,]$ on $\mathscr{H}_t$-mitallinen, joten

$$W = \partial_j w(Y)[\,t < \tau\,]\mathbf{E}_x\Big(\nabla_+ X_h^{(j)}(t) \,|\, \mathscr{H}_t\Big) \; .$$

Nyt voimme käyttää hyväksi tietoa, että lisäys $\nabla_+ X_h^{(j)}$ on riippumaton historiasta, joten ehdollinen odotusarvo onkin vain tavallinen odotusarvo. Voimme siis laskea, että

$$W = \partial_j w(Y)[\,t < \tau\,]\mathbf{E}_x\, \nabla_+ X_h^{(j)}(t) = 0,$$

mistä väite seuraakin ehdollisen odotusarvon odotusarvo-ominaisuuden nojalla. □

Viimeisenä puuttuvana palasena on näyttää, että

2.21. **Lemma.** *Kaikilla* $t \geq 0$ *on voimassa*

$$W := \mathbf{E}_x\Big([\,t < \tau\,]\partial_1\partial_2 w(Y)\nabla_+ X_h^{(1)}(t)\nabla_+ X_h^{(2)}(t) \,|\, \mathscr{H}_t\Big) =: \mathbf{E}_x(V \,|\, \mathscr{H}_t) = 0.$$

Erityisesti $\mathbf{E}_x\, V = 0$.

Todistus. Merkitään seuraavassa $V_j = \nabla_+ X_h^{(j)}(t)$. Koska satunnaismuuttujat $\partial_1\partial_2 w(Y)$ ja $[\,t < \tau\,]$ ovat ovat $\mathscr{H}_t$-mitallisia, niin

$$W = \partial_1\partial_2 w(Y)[\,t < \tau\,]\mathbf{E}_x(V_1 V_2 \,|\, \mathscr{H}_t) \; .$$

Kuten aiemminkin lisäys $\nabla_+ X_h^{(j)}$ on riippumaton historiasta, joten ehdollinen odotusarvo onkin vain tavallinen odotusarvo. Voimme siis laskea, että

$$W = \partial_j w(Y)[\,t < \tau\,]\mathbf{E}_x\; (V_1 V_2) = \partial_j w(Y)[\,t < \tau\,]\mathbf{E}_x\, V_1\, \mathbf{E}_x\, V_2 = 0,$$

sillä $V_1 \perp\!\!\!\perp V_2$. □

Emme siis saaneet kysyttyä funktiota ratkaistua tarkasti, mutta jos $h \ll 1$, niin $u_h(x)$ on lähempänä ja lähempänä *reuna-arvotehtävän*

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0, & x \in G, \\ u(x) = f(x), & x \in \Gamma, \end{cases}$$

ratkaisua. Voisimme siis heuristisesti odottaa, että $u(x) = \mathbf{E}_x\, f(B_\tau)$ olisi tarkasti tämän reuna-arvotehtävän ratkaisu. Tämän perusteluun tulemme palaamaan useasti kurssin aikana ja huomaamme, että monet kohdat vaativat täsmennystä ja oletuksia, joita emme vielä käsitelleet.

On kuitenkin huomattava, että tämä "ratkaisu" on hieman epätyydyttävä. Argumentti osoitti lähes, että jos reuna-arvotehtävällä on ratkaisu w, niin silloin $w \approx u_h$. Tämä on eräänlainen *yksikäsitteisyystulos*. Kysymys herääkin, entä jos ratkaisua ei ole. Silloinhan u_h ei voi olla reuna-arvotehtävän likimääräinen ratkaisu, joten emme oikeastaan vielä tiedä lainkaan funktiosta u_h!

Voisimme tietenkin vedota osittaisdifferentiaaliyhtälöitä käsittelevään kurssiin ja todeta, että ratkaisu on olemassa ja asia olisi siltä osin selvä. Mutta pystymme toki parempaan. Voimme nimittäin osoittaa, että u_h toteuttaa lähes vaaditun reuna-arvotehtävän. Tällöin siis "ratkaisu" on sekä olemassa että yksikäsitteinen.

Voimme toimia seuraavasti. Käytämme hyväksi satunnaiskulun X_h Markovin ominaisuutta. Funktio u_h on määritelmänsä mukaan

$$u_h(x) = \mathbf{E}\,\left(f(X_h(\tau)) \,|\, X_h(0) = x\right) = \frac{\mathbf{E}\, f(X_h(\tau))[\, X_h(0) = x\,]}{\mathbf{P}\,(\, X_h(0) = x\,)}.$$

Voimme "lisätä" tietoa satunnaismuuttujasta $f(X_h(\tau))$ ottamalla mukaan tieto myös siitä mitä tapahtuu ajanhetkellä h.

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \sum_y \frac{\mathbf{E}\, f(X_h(\tau))[\, X_h(0) = x, X_h(h) = y\,]}{\mathbf{P}\,(\, X_h(0) = x\,)} \\ &= \sum_y \mathbf{E}\,\left(f(X_h(\tau)) \,|\, X_h(0) = x, X_h(h) = y\right) \mathbf{P}\,(\, X_h(h) = y \,|\, X_h(0) = x\,) \\ &= \sum_y \mathbf{E}_y\, f(X_h(\tau))\, \mathbf{P}\,(\, X_h(h) = y \,|\, X_h(0) = x\,) \\ &= P_h u_h(x) \end{aligned}$$

kun P_h on siirtymätodennäköisyysmatriisi

$$P_h u(x) = \frac{1}{4} \sum_y u(y)[\, y \text{ on pisteen } x \text{ naapuri}\,].$$

Koska $P_h - \mathrm{Id} = \triangle_h$ on kaksiulotteinen diskreetti Laplacen operaattori, niin $\triangle_h u_h = 0$. Reuna-arvon toteutuminen on itsestään selvää, sillä jos $x \in \Gamma$, niin

$\tau = 0$, joten $u_h(x) = \mathbf{E}_x\, f(x) = f(x)$. Siispä on voimassa

$$\begin{cases} \triangle_h u_h(x) = 0, & \text{kun } x \in G, \\ u_h(x) = f(x), & \text{kun } x \in \Gamma. \end{cases}$$

joten u_h toteuttaa lähes edellä olleen reuna-arvotehtävän ja voimme pitää tarkastelua tältä osin loppuun vietynä.