1. Todennäköisyyslaskennasta ja merkinnöistä

Palautamme seuraavassa lyhyesti mieleen todennäköisyyslaskennan käsitteitä ja esittelemme myös muutamia kurssilla käytettäviä merkintätapoja.

Kaiken satunnaisuuden käsittelyn takana on (mahdollisesti suuri) musta laatikko, jota nimitetään *todennäköisyysavaruudeksi*. Tämä on kolmikko $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Joukko Ω on kaikkien alkeistapahtumien muodostama joukko. Kurssin kannalta tällä joukolla ei ole juurikaan merkitystä eli suurimmaksi osaksi joukkoa Ω voi ajatella äärellisenä tai numeroituvasti äärettömänä joukkona vaikka oikeasti se yleensä on kooltaan suuri. Joukko $\mathscr{F}$ on alkeistapahtumien joukon osajoukkojen $\mathscr{P}(\Omega)$ osajoukko, eli niin sanottujen *tapahtumien* joukko. Monessa käytännön esimerkissä voi ajatella, että kaikki mahdolliset joukon Ω osajoukot ovat tapahtumia. Tämä ei tosin pidä yleisesti paikkaansa.

Yleisessä tilanteessa alkeistapahtumia voi olla ”liikaa”, joten välttämättä kaikkien alkeistapahtumien osajoukkojen ei tarvitse olla tapahtumia, mutta ainakin Ω on aina tapahtuma. Yleisestikin tapahtumat on kuvailtavissa seuraavilla säännöillä.

1.1. Määrittelevät ominaisuudet.

- joukko Ω on *varma* tapahtuma
- jos A on tapahtuma, niin joukko $A^C := \Omega \setminus A$ on myös tapahtuma (ns. *komplementtitapahtuma*)
- jos $\{\, A_k : \ k = 0, 1, 2, \dots \}$ ovat tapahtumia, niin niiden yhdiste

$$\{A_k \text{ tapahtuu jollakin } k = 0, 1, 2, \dots\}$$

  on tapahtuma
- jos $\{\, A_k : \ k = 0, 1, 2, \dots \}$ ovat tapahtumia, niin niiden leikkaus

$$\{A_k \text{ tapahtuu jokaisella } k = 0, 1, 2, \dots\}$$

  on tapahtuma.

Yleisesti, jos jollakin joukkoperheellä on yllä mainitut ominaisuudet, niin sitä nimitetään *σ-algebraksi*. Kaikkien tapahtumien joukko $\mathscr{F}$ on siis aina σ-algebra. Tarvitsemme kurssilla tätäkin käsitettä, jotta voimme puhua tapahtumien osajoukosta, joka itsekin toteuttaa tapahtumien määrittelevät ominaisuudet.

1.2. Määritelmä. Kun $\mathscr{F}$ on jokin σ-algebra ja $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ on sen sellainen osajoukko, että $\mathscr{G}$ on myös σ-algebra, niin joukkoa $\mathscr{G}$ sanotaan *ali-σ-algebraksi*.

Jos Ω on numeroituva, niin yleensä $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Edelleen joudumme usein yhdistelemään alkujaan eri tapahtumajoukkojen tietoja yhdeksi ali-σ-algebraksi. Tätä varten esittelemme yhden tapahtumiin liittyvän merkinnän.

1.3. **Merkintä.** Jos $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ on *mielivaltainen osajoukko*, niin pienintä ali-σ-algebraa $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ sanomme *joukon $\mathscr{C}$ virittämäksi σ-algebraksi* ja merkitsemme $\sigma(\mathscr{C}) := \mathscr{G}$.

Hyödyllistä lisätietoa σ-algebroista ja niihin läheisesti liittyvistä muista joukkoluokista löytyy kurssin Todennäköisyysteoria -kurssimateriaaleista.

Koska tapahtumat $\{A_1, A_2, \dots \text{ ja } A_d\}$ ovat varsin yleisiä, niin käytämme näille lyhennysmerkintää

1.4. **Merkintä.** Kun $A_1, \dots, A_d$ ovat tapahtumia, niin käytämme merkintää

$$A_1 A_2 \dots A_d := \{A_1, A_2, \dots \text{ ja } A_d\}.$$

Kuvaus $\mathbf{P}$ liittää kuhunkin tapahtumaan sen *todennäköisyyden*, mikä on luku suljetulla välillä $[0, 1]$ ja se toteuttaa seuraavat ehdot:

1.5. **Määrittelevät ominaisuudet.**

- varman tapahtuman Ω todennäköisyys $\mathbf{P}(\,\Omega\,) = 1$
- jos A on tapahtuma, niin komplementtitapahtuman $A^C := \Omega \setminus A$ todennäköisyys on $\mathbf{P}\left(\,A^C\,\right) = 1 - \mathbf{P}(\,A\,)$ ja
- jos $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ovat pistevieraita tapahtumia, niin

$$\mathbf{P}(\,A_k \text{ tapahtuu jollakin } k \in \mathbb{N}\,) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\,A_k\,)$$

Mallintaaksemme stokastisia ilmiöitä tarvitsemme vielä satunnaismuuttujan sekä ehdollisen todennäköisyyden käsitteet. Palautamme ensin mieleen satunnaismuuttujat.

Satunnaismuuttuja X on (lähes) mielivaltainen kuvaus todennäköisyysavaruudesta *tilajoukkoon S*. Jos tilajoukko S on jokin äärellinen tai numeroituvasti ääretön joukko, niin tällöin satunnaismuuttuja X voidaan tulkita mielivaltaiseksi kuvauksi $\Omega \to S$. Yleisemmässä tapauksessa, meidän tulisi asettaa myös tilajoukkoon sen säännölliset eli mitattavat tapahtumat. Tällöin vaatimus olisi vain: jos $A \subset S$ on tilajoukon mikä tahansa säännöllinen tapahtuma, niin joukon $\{X \in A\}$ on oltava tapahtuma todennäköisyysavaruudessa Ω. Mitta- ja integrointi -kurssin terminologialla: X on S-arvoinen satunnaismuuttuja tarkoittaa, että kuvaus $X : \Omega \to S$ on *$\mathscr{F}$-mitallinen.* Usein tilajoukko S on myös topologinen avaruus (eli sen avoimet joukot on määrätty). Tällöin yleensä tilajoukon S mitattavat joukot koostuvat sen *Borelin joukoista* $\mathscr{B}(S)$, mikä on sen avointen joukkojen virittämä σ-algebra.

Olemme nyt saaneet kerrattua todennäköisyysavaruuden ja satunnaismuuttujan käsitteet. Jatkossa emme enää kirjoita allaolevaa todennäköisyysavaruutta Ω näkyviin lainkaan. Puhumme vain *tapahtumista* ja *todennäköisyyksistä.* Satunnaismuuttujien kohdalla tarvitsemme vain tiedon *tilajoukosta* S ja siten satunnaismuuttujaa X voimme pitää tilajoukon tuntemattomana alkiona $X \in S$ ja jota voimme käsitellä tarkalleen samoin kuin tilajoukon alkiota.

Tarvitsemme vielä muutaman käsitteen sekä merkinnän. Kun satunnaismuuttujan X tilajoukko $S = \{i_0, i_1, \dots\}$ on jokin positiivisten reaalilukujen $\mathbb{R}_+$ numeroituva osajoukko, niin *satunnaismuuttujan* X *odotusarvo* $\mathbf{E}\,X$ on positiivinen reaaliluku (tai mahdollisesti ääretön ∞)

$$\mathbf{E}\,X := \sum_{k=0}^{\infty} i_k \mathbf{P}\,(\,X = i_k\,)\,. \tag{1.6}$$

Jos tilajoukko $S \subset \mathbb{C}$ on äärellinen, niin sama määritelmä on voimassa, mutta jos tilajoukko on numeroituvasti ääretön kompleksilukujen osajoukko, niin satunnaismuuttujalla *on odotusarvo*, jos myös itseisarvolla $|X|$ on äärellinen odotusarvo. Käytännössä kurssilla satunnaismuuttujat ovat positiivisia[3] tai niillä on odotusarvo.

Yleisessä tapauksessa tilajoukko S voi olla ylinumeroituva kompleksilukujen osajoukko, ja tällöin tarvitsisimme hieman lisätietoja odotusarvosta. Tällaisia tietoja käsitellään lähemmin todennäköisyysteorian kurssilla, mutta myös Mitta- ja integraali –kurssilla, sillä yleisesti odotusarvo on vain mittaintegraali todennäköisyysmitan $\mathbf{P}$ suhteen. Tarvitsemme näitä tietoja kurssilla, mutta yritämme johtaa niiden tarpeen tilannekohtaisesti yksinkertaistaen tarkasteltavia ongelmia ensin.

Odotusarvolla on seuraavia ominaisuuksia:

– odotusarvo on lineaarinen eli jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja X sekä Y ovat satunnaismuuttujia, niin

$$\mathbf{E}\,(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbf{E}\,X + \beta \mathbf{E}\,Y$$

– jos $0 \le X_0 \le X_1, \dots$ ovat satunnaismuuttujia ja $\lim X_n = X$, niin

$$\mathbf{E}\,X = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,X_n\,. \tag{1.7}$$

Näitä kahta ominaisuutta tulemme jatkossa tarvitsemaan usein. Tulemme myös käyttämään seuraavaa niin sanotun Iversonin[4] notaatiota tai *hakasulkumerkinnän.* Jotakin vastaavaa merkintää tarvitaan eri tilanteissa niin usein, että on

[3] eli tilajoukko on $\mathbb{R}_+$:n osajoukko

[4] Kenneth Eugene Iversonin mukaan lähteenä Donald Erwin Knuthin *The Art of Computer Progamming, Vol I*

järkevää käyttää mahdollisimman lyhyttä, selkeää sekä yhtenevää merkintää koko ajan.

1.8. **Merkintä.** Iversonin hakasulkumerkintä tarkoittaa kuvausta väitteiltä luvuille $\{0, 1\}$, joka määritellään seuraavasti:

$$[\,\text{väite}\,] := \begin{cases} 1, & \text{jos väite on tosi,} \\ 0, & \text{jos väite ei ole tosi.} \end{cases}$$

Tämän merkinnän erikoistapauksena saamme esimerkiksi Kroneckerin deltan, sillä $\delta_{ij} = [\, i = j \,]$. Tutustutaan lyhyesti tämän merkinnän "ominaisuuksiin". Voimme esimerkiksi kirjoittaa jokaisen satunnaismuuttujan X, jonka tilajoukko on jokin lukujoukko, yksinkertaisena summana

$$X = \sum_{k \in S} k[\, X = k \,].$$

Yleistämme merkinnän tapahtumille A seuraavasti

1.9. **Merkintä.** Jos A on tapahtuma, niin $[\, A \,]$ on satunnaismuuttuja, jolle

$$[\, A \,](\omega) := [\, \omega \in A \,] = \begin{cases} 1, & \text{jos } \omega \in A, \\ 0, & \text{jos } \omega \notin A, \end{cases}$$

Jatkossa emme tule kirjoittamaan alkeistapahtumaa ω näkyviin, joten jos A on tapahtuma, niin $[\, A \,]$ on satunnaismuuttuja, jonka tilajoukkona on kaksio $\{0, 1\}$. Erityisesti havaitsemme, että odotusarvon määritelmän mukaan

$$\mathbf{E}\,[\, A \,] = 0 \times \mathbf{P}\,(\, [\, A \,] = 0 \,) + 1 \times \mathbf{P}\,(\, [\, A \,] = 1 \,) = \mathbf{P}\,(\, A \,)\,, \tag{1.10}$$

sillä $\{[\, A \,] = 1\} = A$. Siispä induktioilla voimme päätellä, että jos satunnaismuuttujan X tilajoukko $S = \{i_0, i_1, \ldots, i_d\}$, niin odotusarvon lineaarisuuden sekä identiteetin (1.10) avulla voimme johtaa esittämämme odotusarvon määritelmän, sillä

$$\mathbf{E}\, X = \mathbf{E}\left(\sum_k i_k [\, X = i_k \,] \right) = \sum_k i_k \mathbf{E}\,[\, X = i_k \,] = \sum_k i_k \mathbf{P}\,(\, X = i_k \,)\,.$$

Myös suorana sovelluksena Iversonin notaatiosta voimme laskea satunnaismuuttujan $f(X)$ odotusarvon, sillä

$$\mathbf{E}\, f(X) = \mathbf{E}\left(\sum_k f(i_k)[\, X = i_k \,] \right) = \sum_k f(i_k) \mathbf{P}\,(\, X = i_k \,)\,.$$

Summauksen ja odotusarvon järjestystä voi aina vaihtaa, kun tilajoukko S on äärellinen. Äärettömän tilajoukon tapauksessa voimme yleensä perustella summauksen ja odotusarvon järjestyksen vaihdon soveltamalla odotusarvon raja-arvo-ominaisuutta (1.7).

Todennäköisyyslaskennan pikakertauksessa tarvitsemme vielä *ehdollisen todennäköisyyden* käsitteen.

1.11. **Merkintä.** Merkitsemme tapahtuman A todennäköisyyttä ehdolla, että tapahtuma B on tapahtunut, seuraavasti

$$\mathbf{P}\,(\,A\,|\,B\,) := \frac{\mathbf{P}\,(\,AB\,)}{\mathbf{P}\,(\,B\,)}$$

Ehdollinen todennäköisyydellä on samat ominaisuudet kuin tavallisella todennäköisyydellä, joten sitä vastaa myös *ehdollinen odotusarvo*:

1.12. **Merkintä.** Merkitsemme satunnaismuuttujan X joka saa numeroituvan määrän arvoja ehdollista odotusarvo ehdolla, että tapahtuma B on tapahtunut, seuraavasti

$$\mathbf{E}\,(X\,|\,B) := \sum_k i_k \mathbf{P}\,(\,X = i_k\,|\,B\,)\,.$$

Tämä on helposti yleistettävissä tilanteeseen, missä tapahtuman sijasta tiedämme, että toisen satunnaismuuttujan ”arvon”. Jos

$$Y = \sum_l j_l[\,Y = j_l\,]$$

niin edellisen motivoimana voimme ajatella, että

$$[\,Y = j_l\,]\mathbf{E}\,(X\,|\,Y) := [\,Y = j_l\,]\mathbf{E}\,(X\,|\,Y = j_l) \tag{1.13}$$

Summaamalla apumuuttujan l suhteen saamme

$$\mathbf{E}\,(X\,|\,Y) = \sum_l [\,Y = j_l\,]\mathbf{E}\,(X\,|\,Y) = \sum_l [\,Y = j_l\,]\mathbf{E}\,(X\,|\,Y = j_l)$$

Huomaamme, että näin saatu satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo *ehdolla, että tiedämme satunnaismuuttujan* Y on myös satunnaismuuttuja. Tärkeänä erityistapauksena tästä voimme päätellä, että jos $X = f(Y)$, niin

$$\mathbf{E}\,(f(Y)\,|\,Y) = \sum_l [\,Y = j_l\,]\mathbf{E}\,(f(j_l)\,|\,Y = j_l) = \sum_l f(j_l)[\,Y = j_l\,] = f(Y)$$

eli satunnaismuuttujan $f(Y)$ ehdollinen odotusarvo ehdolla, että tiedämme satunnaismuuttujan Y, on satunnaismuuttuja $f(Y)$ itse.

Voimme yleistää ehdollisen odotusarvon käsitettä edellee tilanteeseen, missä tiedämmekin jonkin *äärellisen σ-algebran $\mathscr{G}$*. Yleistämme kaavan (1.13) muotoon

$$[\,B\,]\mathbf{E}\,(X\,|\,\mathscr{G}) := [\,B\,]\mathbf{E}\,(X\,|\,B) \tag{1.14}$$

jokaisella tapahtumalla $B \in \mathscr{G}$. Kun $\mathscr{G}$ on äärellinen, niin sen virittää äärellinen joukko pistevieraita tapahtumia $\{B_1, \ldots, B_m\}$. Tällöin saisimme taas summaamalla

$$\mathbf{E}\,(X \,|\, \mathscr{G}) = \sum_{k=1}^{m} [\,B_k\,] \mathbf{E}\,(X \,|\, B_k)\,. \tag{1.15}$$

Huomionarvoinen seikka on, että $\mathbf{E}\,(X \,|\, \mathscr{G})$ on $\mathscr{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja, sillä tapahtuma $\{\mathbf{E}\,(X \,|\, \mathscr{G}) \in A\} = \{B_{j_1} \text{ tai } \ldots \text{ tai } B_{j_l}\} \in \mathscr{G}$.

Valitettavasti, kun Ω ja tilajoukko S voivat olla mielivaltaisen suuria ja satunnaismuuttujat voivat saada ylinumeroituvan määrän eri arvoja, ei edellinen summaamistekniikka riitä. Yleisesti, satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla tapahtuma B on ilmaistavissa integraalina. Voimme hyvin käyttää tavallista odotusarvoa vastaavia approksimointituloksi tällaisille ehdollisille odotusarvoille

– ehdollinen odotusarvo, ehdolla tapahtuma B on lineaarinen eli jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja X sekä Y ovat satunnaismuuttujia, niin

$$\mathbf{E}\,(\alpha X + \beta Y \,|\, B) = \alpha \mathbf{E}\,(X \,|\, B) + \beta \mathbf{E}\,(Y \,|\, B)$$

– jos $0 \le X_0 \le X_1, \ldots$ ovat satunnaismuuttujia ja $\lim X_n = X$, niin

$$\mathbf{E}\,(X \,|\, B) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,(X_n \,|\, B)\,. \tag{1.16}$$

Yleisen ehdollistamisen σ-algebran $\mathscr{G}$ suhteen onkin jo huomattavasti kinkkisempi. Ongelmana on se, että tällaista σ-algebraa ei voida esittää pistevieraana yhdisteenä tapahtumista, joiden todennäköisyys on aidosti positiivinen. Joudumme siis ottamaan huomioon myös *lähes mahdottomat tapahtumat.* Tämä johtaa muodollisesti 0/0 -tilanteisiin, joten jotain muuta on tehtävä.

Havaitsemme kaavasta (1.15), että äärellisessä tilanteessa ehdollisen odotusarvon määräämiseksi riittää tuntea ehdolliset odotusarvot tapahtumien suhteen. Nämä ehdolliset odotusarvot on ratkaistavissa myös seuraavasta kaavasta (1.17)

$$\mathbf{E}\,([\,B\,]\mathbf{E}\,(X \,|\, \mathscr{G})\,) = \mathbf{E}\,([\,B\,]\mathbf{E}\,(X \,|\, B)\,) = \mathbf{E}\,([\,B\,]X)\,, \tag{1.17}$$

jokaisella tapahtumalla $B \in \mathscr{G}$. Kaava (1.17) seuraa suoraan kaavasta (1.14) ottamalla odotusarvot puolittain. Voisimmekin määritellä, että satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla $\mathscr{G}$ on se satunnaismuuttuja $\mathbf{E}\,(X \,|\, \mathscr{G})$, joka on *yhtälöryhmän* (1.17) *yksikäsitteinen* ratkaisu.

Tämä yhtälö yleistyy helposti yleiseen tilanteeseen. Määrittelemmekin, että

1.18. **Määritelmä.** Olkoon X kompleksiarvoinen satunnaismuuttuja, jonka $\mathbf{E}\,|X| < \infty$ ja $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ jokin taphtumien ali-σ-algebra. Sanomme, että satunnaismuuttujan X *ehdollinen odotusarvo ehdolla* $\mathscr{G}$ on se satunnaismuuttuja $\mathbf{E}\left(X \,|\, \mathscr{G}\right)$, joka on $\mathscr{G}$-mitallinen, $\mathbf{E}\,|\mathbf{E}\left(X \,|\, \mathscr{G}\right)| < \infty$ ja joka on yhtälöryhmän (1.17) ratkaisu.

Se tosiseikka, että ehdollinen odotusarvo on *olemassa* ja *yksikäsitteinen* on epätriviaali. Tämä seuraa Radonin-Nikodymin lauseesta ja se sivuutetaan tällä kurssilla. Enemmän tästä löytyy Todennäköisyysteoria -kurssilla. Edelleen yksikäsitteisyys on voimassa nollatapahtumia vaille. Tätä varten esittelemme merkinnän.

1.19. **Merkintä.** Sanomme, että jokin asia on voimassa *melkein varmasti* tai *m.v.*, jos todennäköisyys asian voimassaololle on 1. Sanomme esimerkiksi, että $X = Y$ m.v. jos tapahtuma $\{X = Y\}$ on melkein varma.

Koska usein ehdollistamme yleisen satunnaismuuttujan X suhteen, niin määrittelemme

$$\mathbf{E}\left(Y \,|\, X\right) := \mathbf{E}\left(Y \,|\, \sigma(X)\right),$$

missä

$$\sigma(X) := \sigma\{\ \{X \in A\} : \ A \text{ on mitallinen joukko}\ \}$$

on satunnaismuuttujan X virittämä σ-algebra. Äärettömyyden mukaantulo pakottaa sietämään näitä nollatapahtumia, joten otamme ne mukaan avosylin ja muistutamme niiden olemassaolosta aina tarvittaessa. Palaamme niihinkin uudestaan, kun emme voi niitä välttää.

Ehdollisen todennäköisyyden avulla voimme määritellä tapahtumien *riippumattomuuden.*

1.20. **Määritelmä.** Sanomme, että tapahtumajoukko $\{\ A_\lambda : \ \lambda \in I\ \}$ on *riippumaton*, jos jokaisella äärellisellä osajoukolla $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_d\} \subset I$ on voimassa

$$\mathbf{P}\left(A_{\lambda_d} \,|\, A_{\lambda_0} A_{\lambda_1} \ldots A_{\lambda_{d-1}}\right) = \mathbf{P}\left(A_{\lambda_d}\right).$$

Sanomme, että satunnaismuuttujajoukko $\{\ X_\lambda : \ \lambda \in I\ \}$ on *riippumaton*, jos aina, kun $\{\ B_\lambda : \ \lambda \in I\ \}$ on perhe tilajoukon tapahtumia, niin vastaava tapahtumajoukko

$$\{\ \{X_\lambda \in B_\lambda\} : \ \lambda \in I\ \}$$

on riippumaton.

Olemme nyt käsitelleet lyhyesti tarvittavat todennäköisyyslaskennan käsitteet. Johdatus todennäköisyyslaskentaan –kurssilla esitettyjä malleja ja jakaumia emme tässä kertaa vaan palautamme ne mieleen tarpeen tullessa. Myöskään joukkojen ylinumeroituvuuksien aiheuttamia teknisiä vaikeuksia tulemme käsittelemään, kun niiden aika on.

Jotta jatkossa ei olisi liikaa määrittelemättömiä käsitteitä, lopetamme johdannon, määräämällä mitä stokastinen prosessi tarkoittaa. Ensin määrittelemme, mikä on tilajoukko.

1.21. **Määritelmä.** Olkoon $S \neq \emptyset$ ja $\mathscr{S}$ jokin σ-algebra joukolla S. Paria $(S, \mathscr{S})$ sanotaan *tilajoukoksi* tai *tila-avaruudeksi*. Jos mitattavista joukoista $\mathscr{S}$ ei ole epäselvyyttä, merkitsemme tilajoukkoa pelkästään kirjaimella S.

Nyt voimme määritellä stokastisen prosessin.

1.22. **Määritelmä.** Olkoon $T \neq \emptyset$. Olkoon $(X_t; t \in T)$ perhe S-arvoisia satunnaismuuttujia. Sanomme tätä perhettä S-arvoiseksi *stokastiseksi prosessiksi*.

Huomaamme, että määritelmässä joukolle T ei ollut mitään erityisiä rajoitteita. Tällä kurssilla yleensä oletamme seuraavaa.

1.23. **Oletus.** *Aikajoukko* T on joko $T = \alpha\mathbb{N}$ jollakin $\alpha > 0$ tai $T \subset \mathbb{R}$ on reaalinen väli. Jos $t \in T$, niin lukua t nimitetään *ajanhetkeksi*. Jos $T = \alpha\mathbb{N}$, niin sanomme aikaa *diskreetiksi*, muuten aika on *jatkuvaa*.

Välillä joudumme kirjoittamaan ikäviä lausekkeita ajanhetkiksi. Tällöin on kätevää, että voimme tarvittaessa kirjoittaa ajanhetken kahteen paikkaan.

1.24. **Merkintä.** Voimme vapaasti merkitä satunnaismuuttujaa ajanhetkellä $t \in T$ joko X_t tai $X(t)$.

1.25. **Oletus.** (1) Jos S on numeroituva joukko, niin $\mathscr{S}$ on aina $\mathscr{P}(S)$.

(2) Käytännössä koko ajan tällä kurssilla tilajoukko S on jokin seuraavista joukoista

$$S = \begin{cases} \{0, 1, \dots, d\}, \\ \mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}, \\ \mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \\ D \subset \mathbb{R}^d, \ \text{kun } d \in \mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

(3) Kun $S = D \subset \mathbb{R}^d$, niin joukko on Borelin joukko (mutta yleensä joko avoin tai suljettu) ja $\mathscr{S} = \mathscr{B}(S)$.

Stokastinen prosessi on siis vain varsin mielivaltainen kokoelma *ajasta riippuvia* satunnaismuuttujia, jotka saavat arvoja tilajoukossa S.

1.26. *Huomautus.* Huomautamme vielä, että antamalla sopiva σ-algebra kaikkien kuvausten joukkoon S^T joukolta T joukkoon S (tarkemmin ns. tulo-σ-algebra), niin $(X(t))$ on stokastinen prosessi jos ja vain jos $X(\omega) := t \mapsto X(t,\omega)$ on S^T-arvoinen satunnaismuuttuja. Satunnaismuuttujan arvoa $X(\omega)$, joka on siis kuvauksia aikajoukolta T tilajoukolle S, nimitetään usein stokastisen prosessin *realisaatioksi* tai *otosfunktioksi*. Myös nimeä *polku* käytetään.

Koska tulojoukko S^T sisältää *kaikki* kuvaukset eikä vain säännöllisiä kuvauksia, ei ole syytä olettaa, että nämä otosfunktiot olisivat jatkuvia saatikka edes mitallisia.