0. Johdanto

0.1. **Satunnaisuudesta.** Tällä kurssilla käsittelemme kurssin nimen mukaisesti stokastisia differentiaaliyhtälöitä ja niiden ratkaisuja, eli stokastisia prosesseja.

Kurssin nimi sisältää useita osia, ja käymme läpi niiden merkityksiä seuraavassa.

Tulkitsemme sanan *stokastinen* tarkoittavan *satunnaista* ja sanan *prosessi* tarkoittavan ilmiötä, joka muuttuu ajan kuluessa eli *riippuu ajasta.*

Stokastisilla prosesseilla tarkoitamme siis satunnaisia ilmiöitä, jotka muuttuvat ajan kuluessa.[1] Kurssilla tulemme tarkastelemaan muutamia yksinkertaisia satunnaisia malleja. Nämä mallit ovat yksinkertaistuksia meitä kiinnostavista ilmiöistä, joita esiintyy esimerkiksi luonnossa, kaupankäynnissä tai vaikka uhkapeleissä.

Stokastiset (eli satunnaiset) ja matemaattiset mallit ymmärrämme tällä kurssilla molemmat matemaattisiksi malleiksi, mutta erottavana tekijänä pidämme satunnaisuuden mukanaoloa tai sen puuttumista. Tilastollisessa mallissa mittaustapahtuma sekä mittausdata on yleensä mukana tarkastelussa, mutta muuten tilastollinen malli on myös satunnaismalli.

Tarkastellaan lyhyesti käsitteellisellä tasolla erään ilmiön matemaattista sekä satunnaista mallia ja niiden yhteyksiä. Lämpöyhtälö on (eräs) fysiikasta tuttu matemaattinen malli lämmön johtumiselle. Tämä malli osoittaa, että lämpötila kappaleessa pyrkii tasoittumaan siten, että lämpö virtaa kuumemmista kohdista kylmempiin.[2] Matemaattisesti lämpöyhtälö on toisen kertaluvun lineaarinen *osittaisdifferentiaaliyhtälö* $\partial_t u = \partial_{x_1}^2 u + \dots \partial_{x_n}^2 u$ ja mallin antamat ennusteet saadaan tarkastelemalla tätä yhtälöä ja sen ratkaisujen käyttäytymistä.

Lähemmin tarkasteltuna lämpötila on kuitenkin seurausta kappaleen pienimpien rakennusosasten lämpöliikkeestä, joka on rakennusosasten hyvin epäsäännöllistä liikettä kappaleen kidehilassa. Kappaleen kohta on sitä kuumempi, mitä voimakkaammin sen osaset liikkuvat. Lämmön johtuminen seuraa nyt osasten törmäyksistä naapureihinsa, sillä voimakkaimmin liikkuvat osat törmäävät vieressä oleviin osiin voimakkaammin kuin hitaammin liikkuvat ja luovuttavat vastaavasti enemmän liike-energiaansa törmäyksissä kuin sitä törmäyksessä saavat. Tämä saa keskiarvomielessä aikaan samanlaisen mallin kuin edellä ollut osittaisdifferentiaaliyhtälömalli.

[1] Yleisestikin tämä tulkinta on oikea, mutta ”aika” ei yleisessä tilanteessa vastaa intuitiivista käsitystämme ajasta

[2] tai kylmyys virtaa kylmemmistä kohdista kuumempiin

Yksittäisen pienen rakennusosasen liikettä on käytännössä paras mallintaa puhtaasti satunnaisena liikkeenä. Voimme siis pitää tätä lämpömallia stokastisena mallina. Tämä on yksi esimerkki tilanteesta, milloin mallia on järkevää pitää satunnaisena.
Tällä kursilla emme jatkossa ota enää kantaa mallinuksellisiin saatikka yhteyksiin reaalimaailman kysymyksiin vaan keskitymme yksinkertaisiin stokastisiin malleihin. Tarkastelemme kurssilla *Brownin liikettä* ja sen ominaisuuksia. Välitämme näitä ominaisuuksia hieman mutkikkaimmille prosesseille soveltamalla *stokastisia differentiaaliyhtälöitä*, jotka ymmärrämme kurssilla Brownin liikkeestä riippuvina yksinkertaisina yhtälöinä. Eräässä mielessä kurssin pääkäsite Brownin liike on juuri lämpöyhtälöä vastaava mikroskooppisen tason liikkeen ideaalisaatio.

Määrittelemme Brownin liikeen piakkoin, mutta jotta saisimme läsnäolevan satunnaisuuden kuriin, tulemme tarkastelemaan kaikkea satunnaisuutta todennäköisyyslaskennan keinoin ja kertaamme peruskäsitteitä ennen Brownin liikkeen määrittelemistä.

0.2. **Differentiaaliyhtälöistä.** Kurssin nimen toinen osa *differentiaaliyhtälö* liittyy myös ajan käsitteeseen. Differentiaaliyhtälöt kuvaavat, kuinka ilmiö tulee kehittymään ajan kuluessa, kun tiedämme jotain sen nykyhetken *tilasta*.

Edellä törmäsimme jo esimerkin muodossa osittaisdifferentiaaliyhtälöön eli lämpöyhtälöön. Differentiaaliyhtälöt ovat yhtälöitä, joissa funktion ja joidenkin sen eri asteisten derivaattojen arvot ovat annetussa relaatiossa keskenään. Yksinkertaisin differentiaaliyhtälö on

$$f'(x) = 0, \text{ kun } x \in (a, b) \subset \mathbb{R}.$$

Kyseinen differentiaaliyhtälö ei sisällä funktion arvoja lainkaan. Analyysin peruslause kertoo, että kyseisen yhtälön ratkaisu on vakio välillä (a, b). Hieman monimutkaisempi on

$$f'(x) = f(x), \text{ kun } x \in (a, b) \subset \mathbb{R}.$$

Tämän ratkaisu on $f(x) = ce^x$ jollakin vakion arvolla c. Tämän kurssin kannalta tärkeä differentiaaliyhtälöiden luokka on ensimmäisen kertaluvun diffentiaaliyhtälöt, jotka ovat muotoa

$$f'(x) = F(x, f(x)), \text{ kun } x \in (a, b) \subset \mathbb{R},$$

missä $F\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jokin annettu riittävän säännöllinen funktio. Differentiaaliyhtälöiden kurssilta tiedämme, että tällaisten ratkaisemiseksi differentiaaliyhtälö on hyödyllistä muuttaa *integraaliyhtälöksi*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x F(t, f(t))\,\mathrm{d}t \text{ kun } x \in (a,b) \subset \mathbb{R}.$$

Tämä muotoilu helpottaa ratkaisun *olemassaolon ja yksikäsitteisyyden* tarkastelua huomattavasi vaikka ehkä ensi silmäyksellä yhtälö ei vaikuta lainkaan helpommalta.

Tämä differentiaaliyhtälön korvaaminen integraaliyhtälöllä on itse asiassa tapa, jolla *määrittelemme* stokastiset differentiaaliyhtälöt. Määrittelememmme mitä tarkoitamme *stokastisella integraaliyhtälöllä* ja käytämme stokastista differentiaaliyhtälöä eräänlaisena lyhennysmerkintänä ja kätevänä muistisääntönä tälle.

0.3. **Johdattelua stokastisten differentiaalien ja integraalien maailmaan.** Voimme nyt johdatella heuristisesti kurssin pääsisällön, eli stokastisten prosessien ja differentiaaliyhtälöiden tarkastelun.

Palaamme ensin ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöön

$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

Nimitys *differentiaali* on peräisin Gottfried Wilhelm Leibnizilta ja se tarkoittaa *infinitesimaalista* eli äärettömän pientä erotusta. Nykyään me ymmärrämme derivaatalla erotusosamäärän raja-arvona, mutta Leibnizin differentiaaliosamäärä elää käytetyissä merkinnöissä vieläkin varsin vahvasti.

Leibnizin merkinnällä differentiaaliyhtälö kirjoitetaan

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = F(x, f(x)).$$

Voimme ajatella differentiaaleja eräänlaisina rajoina erotuksista, joita nimitetään myös differensseiksi. Voimme siis ajatela yllä olevaa differentiaaliyhtälöä seuraavan *differenssiyhtälön*

$$\frac{\nabla_+ f(x_k)}{\nabla_+ x_k} =: \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = F(x_k, f(x_k))$$

missä $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leq b$ lähisukulaisena. Jatkossa merkitsemmekin $\nabla_+ a_k := a_{k+1} - a_k$ oli (a_k) mikä hyvänsä lukujono.

Lähtökohtana differentiaalilaskennalle oli käyrien tangenttisuorien määrittäminen, minkä tiedämme vastaavan derivaattan määrittämistä. Leibniz käytti differentiaaleja eräänlaisina ideaalisina lukuina, joilla oli samanlaiset laskulait kuin muillakin luvuilla, mutta tietyin poikkeuksin. Tarkastellaan nyt ongelmaa

Ongelma. Jos $f(x) = x^2$, niin

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{(x + \mathrm{d}x)^2 - x^2}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x = 2x.$$

Kuinka ”luvulla” $\mathrm{d}x$ voi jakaa, jos se on lopuksi nolla?

Tämä epätäsmällisyys johti derivaatan moderniin käsittelyyn raja-arvona, joka voidaan mukavasti määritellä Karl Theodor Wilhelm Weirstrassin tavalla käyttämällä $\varepsilon - \delta$ -tekniikkaa.

Näillä differentiaaleilla laskemisella on kuitenkin oma mukavuutensa. Jos *olettaisimme*, että $(\mathrm{d}x)^2 = 0$ (eli ”luku” $\mathrm{d}x$ on nollan tekijä), niin edellinen lasku onnistuisi

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{(x + \mathrm{d}x)^2 - x^2}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 2x.$$

Differentiaaleilla laskettaessa myös yhdistetyn kuvauksen derivointi on helppo esittää. Jos $f(x) = g(h(x)) =: g(t)$ ja merkitsemme $t + \mathrm{d}t := h(x + \mathrm{d}x)$, jolloin $\mathrm{d}t = h(x + \mathrm{d}x) - h(x) = \mathrm{d}h(x)$ ja edelleen

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}g(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = g'(t)\,\mathrm{d}h(x) = g'(h(x))h'(x)\,\mathrm{d}x$$

Suuren osan laskennosta voisi esittää tämän varsin ruman lisäoletuksen avulla. Oletus $(\mathrm{d}x)^2 = 0$ vastaa eräässä mielessä sileysoletus funktiolle. Jos funktio ei ole sileä, ei oletus ole myöskään järkevä. Kurssilla tulemme johtamaan hieman vastaavan säännön niin sanotulle *stokastiselle differentiaalille*, joka yksikertaisimmillaan on $\mathrm{d}B_t$. Jos funktio $f = t \mapsto f(t)$ on differentioituva, tiedämme ketjusäännön avulla, että

$$\mathrm{d}(f(t)^2) = 2f(t)\,\mathrm{d}f(t)$$

Toisaalta, olisimme voineet käyttää oletustamme $(\mathrm{d}f(t))^2 = 0$ ja olisimme laskemalla

$$\mathrm{d}(f(t)^2) = (f(t) + \mathrm{d}f(t))^2 - f(t)^2 = 2f(t)\,\mathrm{d}f(t) + \mathrm{d}f(t)^2 = 2f(t)\,\mathrm{d}f(t)$$

päätyneet samaan lopputulokseen. Analyysin peruslauseen avulla voisimme siten päätellä, että tämä on yhtäpitävää integraaliesityksen

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}f(t) = \tfrac{1}{2}(f(x)^2 - f(0)^2)$$

kanssa.

Yllämainittu stokastinen differentiaali $\mathrm{d}B_t$ ei tottele tätä sääntöä! Tulemme osoittamaan, että *erään* tulkinnan eli niin sanotun Itō-laskennan mukaan, jos vaihdamme funktion f stokastiseksi funktioksi $B = t \mapsto B_t$, niin

$$\int_0^x B_t\,\mathrm{d}B_t = \tfrac{1}{2}(B_x^2 - B_0^2) - \tfrac{1}{2}t.$$

Vertaamalla tätä edellä olevaan *Riemannin–Stieltjesin* integraaliin, huomaamme, että ne eroavat yhden ylimääräisen termin suhteen. On makukysymys, onko stokastisessa integraalissa ylimääräisiä termejä vai puuttuuko tavallisesta integraalista jotain!

Differentiaalitulkinnalla tämän kaavan voisi selittää seuraavalla oletuksella: oletetaan, että $(\mathrm{d}t)^2 = 0$, mutta $(\mathrm{d}B_t)^2 = \mathrm{d}t$. Tällöin jo useasti suorittamamme lasku antaisikin

$$\mathrm{d}(B_t^2) = (B_t + \mathrm{d}B_t)^2 - B_t^2 = 2B_t\,\mathrm{d}B_t + \mathrm{d}B_t^2 = 2B_t\,\mathrm{d}B_t + \mathrm{d}t,$$

mikä analyysin peruslauseen mukaan johtaisikin stokastiseen integraaliin. Jos haluaisimme laskea, mitä on $\mathrm{d}B_t^3$ niin tarvitsisimme oletukset myös siitä, mitä on $[B_t]\,\mathrm{d}t$. Osoittautuu, että sopiva oletus on, että $\mathrm{d}B_t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}B_t = 0$, missä varmistimme myös sen, ettei mahdollinen tulon vaihdannaisuus rikkoudu.

Tällä kurssilla pyrkimyksemme onkin selittää tämä Kiyoshi Itōn integraalikäsitteen yleistys ja soveltaa sitä joihinkin muilta kursseilta ongelmiin.