Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 9 (1.12.2009 mennessä)

1. Näytä käyttämällä raja-arvomääritelmää, että

$$\langle B^j, B^k \rangle_t = 0,$$

kun $B_t = (B_t^j)$ on d-ulotteinen Brownin liike.

2. Palautuvuuden yhteydessä (ja aiemmin) käytimme tietoa, että $\tau < \infty$ $\mathbf{P}_x$-melkein varmasti, kun τ on poistumishetki välitä $(0, 2r)$ ja $x \in (0, 2r)$. Osoita hieman vähemmän eli näytä

$$\sup_{x \in (0,2r)} \mathbf{P}_x(\tau > 1) \leq \rho \quad \text{ja} \quad \sup_{x \in (0,2r)} \mathbf{P}_x(\tau > 2) \leq \rho^2,$$

kun $\rho = \mathbf{P}_0(|B_1| \leq r)$.

3. Näytä, että d-ulotteinen Brownin liike on rotaatioiden suhteen invariantti eli näytä, että jos R on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^d$ rotaatio, niin $\widetilde{B}_t := RB_t$ on Brownin liike.

4. Näytä luennoissa mainittu tieto, että tasossa (eli $\mathbb{R}^2$:ssa)

$$\mathbf{P}_0(\tau_0 < \infty) = 0$$

käyttämällä vahvaa Markovin ominaisuutta.

5. Oletamme, että on olemassa 1-ulotteinen prosessi X_t, joka toteuttaa stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\,\mathrm{d}B_t + b(X_t)\,\mathrm{d}t,$$

kun $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat jotain rajoitettuja C^2-funktioita. Olkoon $Z_t := f(X_t)$, kun $f \in C^2$ on rajoitettu.

i) Määrää $\mathrm{d}Z_t$ ja $\mathrm{d}\langle Z \rangle_t$.

ii) Minkä differentiaaliyhtälön funktion f olisi toteutettava, jotta Z_t olisi lokaali martingaali?