

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 8 (24.11.2009 mennessä)

1. Näytä suoraan osittaisintegroitikaavalla, että

$$d(X^4)_t = 4X_t^3 dX_t + 6X_t^2 d\langle X \rangle_t.$$

2. Näytä Lemma 5.43 eli

i) Itön kaavan toteuttavien funktioiden joukko \mathcal{I} on lineaarinen

ii) jos $f \in \mathcal{I}$, niin $g(x_1, \dots, x_d) = x_j f(x_1, \dots, x_d)$ kuuluu myös joukkoon \mathcal{I} .

3. Etsi sellainen funktio $f(x, y)$, että $B_t^6 + f(B_t, t)$ on martingaali Brownin liikkeen historian suhteen.

4. Sovella edellisen tehtävän martingaalia poistumishetken $\tau = \inf\{t > 0 : |B_t| > r\}$ kolmas momentti $\mathbf{E}_0 \tau^3$.

5. Kappaleessa 3 törmäsimme Brownin siltaan stokastisena differentiaaliyhtälönä

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dB_t.$$

Näytä, että prosessi $Y_t = X_t/(1-t)$ toteuttaa helpomman stokastisen differentiaaliyhtälön

$$dY_t = \frac{dB_t}{1-t}.$$