Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 7 (17.11.2009 mennessä)

1. Näytä, että kuvaus $M \mapsto \| M \|_{\mathscr{M}^2}$, kun

$$\| M \|_{\mathscr{M}^2}^2 = \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}\, M_t^2$$

on normi joukossa $\mathscr{M}^2 = \{\ M : \ M \text{ on martingaali ja } \| M \|_{\mathscr{M}^2} < \infty\ \}$.

2. Näytä, että kun $H \in \Pi_3(X)$, niin

$$\tau_n = \inf\{\ t > 0 : \ \int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle X \rangle > n\ \}$$

on pysähdyshetki ja että $\tau_n \uparrow \infty$ melkein varmasti.

3. Näytä Kunitan–Watanaben epäyhtälön todistuksen puuttuva osa eli

$$(\langle X, Y \rangle_t - \langle X, Y \rangle_s)^2 \leq (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s)(\langle Y \rangle_t - \langle Y \rangle_s)$$

tarkastelemalla martingaalin $X + \lambda Y$ varianssiprosessia reaaliluvun λ funktiona.

4. Näytä, että jos $H, K \in b\Pi_1$ ja X on jatkuva ja rajoitettu martingaali, niin

$$HK \cdot X = H \cdot (K \cdot X)$$

5. Näytä, että jos määrittelemme kovarianssiprosessin erotusten tulojen summan raja-arvona, niin $\langle M, A \rangle_t = 0$, kun M on jatkuva rajoitettu martingaali ja A on rajoitetusti heilahteleva prosessi.