

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 6 (10.11.2009 mennessä)

1. Osoita Lemma 5.17. eli jos $H \in b\Pi_0$ ja X on (\mathcal{F}_t) -martingaali, niin $(H \cdot X)_t$ on (\mathcal{F}_t) -martingaali.

2. Täydennä Lemman 5.20. todistusta, eli osoita että

$$\langle (H \cdot X), (K \cdot Y) \rangle_t = \int_0^t H(s)K(s) d\langle X, Y \rangle_s$$

kun X ja Y ovat rajoitettuja (\mathcal{F}_t) -martingaaleja ja prosessit $H(s) = C[s \in (a, b)] \in b\Pi_0$ ja $K(s) = D[s \in (c, d)] \in b\Pi_0$ ja $a < b \leq c < d$.

3. Näytä Lemma 5.22 eli näytä, että Lemmat 5.17 ja 5.20 yleistyvät yksinkertaisille ennustettaville prosesseille $H, K \in b\Pi_1$.

4. Näytä, että $\langle X, X \rangle_t = \langle X \rangle_t$.

5. Tiedämme, että $X_t = B_t^2 - t$ on martingaali. Olemme aiemmin nähneet myös, että

$$X_t = 2 \int_0^t B_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n \cdot B)_t$$

melkein varmasti, kun

$$H_n(s) = \sum_k B(k2^{-n})[s \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]].$$

Päättele Lemman 5.20 ja Lemman 5.22 (tai tehtävän 3) avulla, että

$$\langle X \rangle_t = 4 \int_0^t B_s^2 ds.$$