

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 5 (19.10.2009 mennessä)

1. Näytä, että $X_t := B_t^3 - 3tB_t$ on martingaali Brownin liikkeen B historian suhteen.
2. Näytä, että pysäytetty prosessi $X^\tau(t) = X(\tau \wedge t)$ on (\mathcal{F}_t) -martingaali jos ja vain jos X^τ on $(\mathcal{F}_{t \wedge \tau})$ -martingaali.
3. Näytä suoraan optionaalisen pysäyttämisen lauseen avulla, että jos X on càdlàg (\mathcal{F}_t) -martingaali ja τ rajoitettu (\mathcal{F}_t) -pysähdyshetki, niin X^τ on $(\mathcal{F}_{t \wedge \tau})$ -martingaali. Päättele sitten Lemma 4.19 tämän avulla.
4. Olkoon (X_n) jono riippumattomia ekponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla c (eli $X_n \sim \text{Exp}(c)$). Asetaan

$$S_n = \sum_{k=0}^n X_k$$

ja jokaisella $t \geq 0$ asetamme edelleen

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} [S_n \leq t].$$

Prosessia N_t nimitetään Poissonin prosessiksi. Näytä, että

- i)* prosessilla N_t on riippumattomat lisäykset ja lisäykset $N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(c(t-s))$ kun $t > s$.
- ii)* Näytä, että $N_t - ct$ on martingaali Poissonin prosessin historian suhteen.
- iii)* Näytä, että $(N_t - ct)^2 - ct$ on myös martingaali Poissonin prosessin historian suhteen.

5. Olkoon (X_n) alimartingaali ja olkoon $X_k^* = \sup_{j \leq k} X_j$. Näytä optionaalisen pysäyttämisen lauseen avulla, että

$$\lambda \mathbf{P}(X_n^* \geq \lambda) \leq \mathbf{E}(X_n | X_n^* \geq \lambda) \leq \mathbf{E}(|X_n| | X_n^* \geq \lambda)$$

jokaisella $\lambda > 0$. Päätele tästä ensimmäinen osa Doobin epäyhtälöstä. Käyttämällä identiteettiä

$$x^p = p \int_0^x \lambda^{p-1} d\lambda$$

päätele, että positiivisille alimartingaaleille (X_n) on voimassa

$$\mathbf{E}(X_n^* \wedge k)^p \leq \frac{p}{p-1} \mathbf{E}|X_n| (X_n^* \wedge k)^{p-1}$$

Päätele Doobin L^p -maksimaali-epäyhtälö tästä Hölderin epäyhtälön

$$\mathbf{E}|XY| \leq (\mathbf{E}|X|^p)^{1/p} (\mathbf{E}|Y|^q)^{1/q}$$

avulla. Parametri q Hölderin epäyhtälössä toteuttaa yhtälön $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.