Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 4 (13.10.2009 mennessä)

1. Oletetaan, että X_n toteuttaa toisen kertaluvun differenssiyhtälön

$$\begin{cases} X_{k+2} - 2X_{k+1} + 2X_k = \xi_k, & k \geq 0, \\ X_0 = 0, X_1 = 0. \end{cases}$$

ja (ξ_k) on jono samoinjakautuneita ja riippumattomia kolikonheittosatunnaismuuttujia. Näytä, ettei prosessi X_k ole Markovin prosessi, mutta 2-ulotteinen prosessi $Y_k = (X_{k+1}, X_k)$ on Markovin prosessi.

2. Olkoon $\mathscr{N}$ nollatapahtumat ja $\mathscr{G}$ jokin ali-σ-algebra. Näytä, että

i) algebra $\mathscr{A}$, jonka $\mathscr{N}$ ja $\mathscr{G}$ virittää, koostuu pelkästään joukoista, jotka ovat muotoa $A \cup N \setminus M$, missä $A \in \mathscr{G}$ ja $N, M \in \mathscr{N}$.

ii) $\mathscr{A}$ on myös Dynkinin systeemi (eli $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{N}, \mathscr{G})$).

3. Olkoon $\tau_1 \leq \tau_2$ pysähdyshetkiä filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen. Näytä, että $\mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$.

4. Näytä luentojen Lemma 4.7, eli kun H on ennustettava, rajoitettu ja positiivinen, niin $(H \cdot X)_n$ on alimartingaali tai ylimartingaali, jos X_n on alimartingaali tai ylimartingaali.

5. Näytä, että jos $N(\omega) \leq M(\omega) < K < \infty$ ovat $(\mathscr{F}_n)$-pysähdyshetkiä ja $A \in \mathscr{F}_N$, niin $N^A := N[\,A\,] + K[\,A^C\,]$ ja $M^A := M[\,A\,] + K[\,A^C\,]$ ovat rajoitettuja $(\mathscr{F}_n)$-pysähdyshetkiä, ja

$$X(N^A) = X(N)[\,A\,] + X(K)[\,A^C\,]$$