Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 3 (06.10.2009 mennessä)

1. Olkoon (τ_n) jono pysähdyshetkiä filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen. Näytä, että

i) $\tau_1 \wedge \tau_2$ on pysähdyshetki

ii) $\tau_1 \vee \tau_2$ on pysähdyshetki

iii) $\sup \tau_n$ on pysähdyshetki

2. Näytä, että jos $(\mathscr{F}_t)$ on filtraatio, niin $(\mathscr{F}_t^+)$ on oikealta jatkuva filtraatio, kun

$$\mathscr{F}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s.$$

3. Olkoon aikajoukko $T = \mathbb{N}$ ja (X_n) jokin satunnaiskulku. Jos τ on pysähdyshetki X:n historian $(\mathscr{H}_n)$ suhteen, niin voimme määritellä

$$\mathscr{H}_\tau := \sigma\{ \{\tau = n, X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} : \ n \in \mathbb{N}, i_0, \ldots, i_n \in S \}$$

Näytä, että tapahtuma $A \in \mathscr{H}_\tau$ jos ja vain jos $\{A \text{ ja } \tau \leq n\} \in \mathscr{H}_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Sanomme usein, että jokin joukko A on suljettu toimituksen suhteen, jos toimituksen arvo sisältyy joukkoon A. Esimerkiksi joukkoperhe $\mathscr{G}$ on suljettu leikkauksen suhteen, jos $A \cap B \in \mathscr{G}$ aina, kun $A, B \in \mathscr{G}$. Tällaista joukkoperhettä nimitetään π-systeemiksi.

Voimme määritellä, että tapahtumaperhe $\mathscr{A}$ on *algebra*, jos se on suljettu komplementoinnin ja leikkauksen suhteen ja lisäksi se sisältää varman tapahtuman. Sanomme myös, että tapahtumaperhe $\mathscr{D}$ on *Dynkinin systeemi*, jos se sisältää varman tapahtuman ja lisäksi $\mathscr{D}$ on suljettu suhteellisen komplementoinnin ja numeroituvan monotonisen yhdisteen suhteen. Numeroituvalla monotonisella yhdisteellä tarkoitamme

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \ \text{kun } A_n \subset A_{n+1}$$

ja suhteellisella komplementoinnilla toimitusta $A \setminus B$, kun $B \subset A$. Esimerkiksi todennäköisyysteorian kurssilla näytetään, että $\mathscr{G}$ on σ-algebra jos ja vain jos $\mathscr{G}$ on sekä π-systeemi että Dynkinin systeemi. Lisäksi tärkeä monotonisen luokan lause tai Dynkinin lemma sanoo, että jos $\mathscr{G}$ on π-systeemi, niin $\sigma(\mathscr{G})$ on $\mathscr{G}$:n virittämä Dynkinin systeemi, mitä usein merkitään $\sigma(\mathscr{G}) = \lambda(\mathscr{G})$. Tarvitsemme jatkossa näitä käsitteitä, joten harjoittelemme hieman.

4. Osoita seuraavat kaksi kohtaa.

i) Näytä, että

$$\pi(\mathscr{C}) := \bigcap \{ \mathscr{G} : \ \mathscr{C} \subset \mathscr{G}, \text{ ja } \mathscr{G} \text{ on } \pi\text{-systeemi} \}$$

on π-systeemi, jota nimitetään $\mathscr{C}$:n virittämäksi π-systeemiksi.

ii) Näytä, että jos (X_t) on reaaliarvoinen stokastinen prosessi, niin

$$\begin{aligned} &\pi\{ \{X_t \le x\} : \ t \in T, x \in \mathbb{R} \} \\ &\quad = \{ \{X_{t_1} \le x_{t_1}, \dots X_{t_n} \le x_{t_n}\} : \ n \in \mathbb{N}_+, t_1, \dots, t_n \in T \} \end{aligned}$$

5. Olkoon X MP historiansa $(\mathscr{H}_t)$ suhteen. Jos määrittelemme tulevaisuuden $\mathscr{T}_t := \sigma\{ X_s : \ s \ge t \}$, niin voimme yleistää Markovin ominaisuuden muotoon

$$\mathbf{E}\,(Z \,|\, \mathscr{H}_t) = \mathbf{E}\,(Z \,|\, X_t)$$

aina, kun Z on rajoitettu satunnaismuuttuja, joka on $\mathscr{T}_t$-mitallinen. Näytä tästä seuraavat erikoistapaukset.

i) $Z = f(X_s)$, kun $s \ge t$ ja f on rajoitettu ja mitallinen kuvaus.

ii) $Z = [\, A_n \,]$, kun tapahtuma

$$A_n = \{X_{s_1} \le x_1, \dots, X_{s_n} \le x_n\} \in \mathscr{T}_t$$

ja $t < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ (ainakin tapauksessa $n = 2$.)

Voit halutessasi myös miettiä, kuinka yleinen tapaus seuraa näistä.