Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 2 (29.09.2009 mennessä)

1. Olkoon (A_n) jono tapahtumia ja määritellään

$$\{\limsup_{n\to\infty} A_n\} := \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{ja} \quad \{\liminf_{n\to\infty} A_n\} := \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

Näytä, että

$$[\limsup_{n\to\infty} A_n](\omega) = \limsup_{n\to\infty} [A_n](\omega).$$

2. Olkoon B Brownin liike ja $M > 0$. Määritellään tapahtumat $A(t)$, $t > 0$, seuraavasti

$$A(t) = \left\{ \sup_{0<s\leq t} \frac{|B(s)|}{s} > M \right\}$$

Näytä, että $A(t) \subset A(s)$ kun $t \leq s$ ja näytä, että

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A(1/n) \right) = 1$$

3. Päättele kahden edellisen tehtävän avulla, että Brownin liikeen polku $t \mapsto B(t)$ ei ole derivoituva, kun $t = t_0$ melkein varmasti. Jos haluat, voit miettiä, kuinka tästä voisi vielä päätellä, että Brownin liikkeen polut eivät ole missään derivoituvia todennäköisyydellä 1.

4. Määritellään *fraktionaalinen Brownin liike* $Z_H(t)$, joka toteuttaa Brownin liikkeen määritelmän seuraavin muutoksin:

- $\mathbf{E}\, Z_H(t)^2 = t^{2H}$ ja
- lisäykset ovat stationaarisia, mutta eivät välttämättä riippumattomia

Oletamme, että $H \in (0, 1)$. Määrää tämän ehdon avulla kovarianssifunktio $k(t, s) := \mathbf{E}\, Z_H(t) Z_H(s)$.

5. Näytä, että siltakävely (Esimerkki 3.5) ei ole aikastationaarinen.