

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 10 (8.12.2009 mennessä)

1. Päättele, että tasossa

$$\mathbf{E}_x u(B_\eta) = \int u(y)\mu(dy)$$

kun μ on yksikköympyrän S_1 normeerattu pintamitta seuraavin askelin.

i) Jaa yksikköympyrä S_1 tasaisesti n kappaleeseen kaarenpätkiä $I_{k,n}$ ja näytä, että

$$\mathbf{P}_x(B_\eta \in I_{k,n}) = 1/n$$

jokaisella k . (Vihje. rotaatiosymmetria)

ii) Näytä väite yksinkertaisille funktioille u yksikköympyrän päällä

iii) Näytä väite jatkuville funktioille u ja sen jälkeen halutessasi mitallisille funktioille

2. Näytä, että jos $x \in \Gamma$ on säännöllinen piste, niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{x_n}(\tau \leq t) = 1$$

jokaisella $t > 0$ ja jokaisella $x_n \rightarrow x$. Tämän osoittamiseksi, osoita seuraavat:

i) näytä ensin, että jos $x_n \rightarrow x$ oli x mikä tahansa reunan piste, niin

$$\liminf \mathbf{P}_{x_n}(\tau \leq t) \geq \mathbf{P}_x(\tau \leq t)$$

ii) päättele väite tästä.

3. Näytä käyttämättä kartioehto että välin $(a, b) \subset \mathbb{R}$ reunapisteet ovat aina säännöllisiä.

4. Osoita Blumenthalin 0-1 -laki näyttämällä, että jos $A \in \widehat{\mathcal{H}}_0$, niin

$$\mathbf{P}_x(A) = [x \in A]$$