Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 1 (22.09.2009 mennessä)

1. Olkoon (X_n) jono reaaliarvoisia positiivisia satunnaismuuttujia. Näytä, että $Y := X_1 + X_2$, $Z := X_1 X_2$ sekä

$$W := \inf_n X_n$$

ovat satunnaismuuttujia.

2. Näytä, että jos $X \geq 0$ on reaaliarvoinen satunnaismuuttuja, niin satunnaismuuttujat $\widehat{X}^{\varepsilon} := \varepsilon \lfloor X/\varepsilon \rfloor$ suppenevat monotonisesti kohti satunnaismuuttujaa X, kun $\varepsilon = 2^{-n} \downarrow 0$. Tässä ja muulloin $\lfloor x \rfloor := k \in \mathbb{Z}$, joko toteuttaa $k \leq x < k+1$. **Korjaus: Oletamme siis lisäksi, että $\varepsilon = 2^{-n}$.**

3. Osoita, että yleisessä tilanteessa satunnaismuuttujan $f(X)Y$ ehdollinen odotusarvo

$$\mathbf{E}\left(f(X)Y \,|\, X\right) = f(X)\mathbf{E}\left(Y \,|\, X\right)$$

melkein varmasti.

4. Osoita ehdollinen Fatoun lemma käyttämällä tavallista monotonisen suppenemisen ominaisuutta. Eli jos (X_n) on jono positiivisia satunnaismuuttujia ja $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ on jokin σ-algebra, niin

$$\mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \,|\, \mathscr{G}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(X_n \,|\, \mathscr{G}\right)$$

melkein varmasti.

5. Olkoon $X \sim \mathfrak{N}(0,1)$. Näytä, että

$$\mathbf{E}\, X^{2n} = (2n-1)!! =: (2n-1) \times (2n-3) \times \ldots 3 \times 1$$

jokaisella $n \geq 1$ ja näytä tämän avulla, että Lauseen 2.4. Hölderin eksponentiksi voidaan saada mikä tahansa luku $\lambda < \frac{1}{2}$.

6. Näytä luentojen Lemma 2.15. eli SK-ketjuominaisuus yksinkertaiselle satunnaiskävelylle.