Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 9

1. Näytä käyttämällä raja-arvomääritelmää, että

$$\langle B^j, B^k \rangle_t = 0,$$

kun $B_t = (B_t^j)$ on d-ulotteinen Brownin liike.
Ratkaisuehdotus: Nyt

$$\sum_k \nabla_+ B^j(t_{k,n}) \nabla_+ B^l(t_{k,n}) =: \sum_k \psi_{k,n} =: S_n$$

on riippumattomien ja samoinjakautuneiden satunnaismuuttujien summa. Voimme siten määrätä helposti sen odotusarvon ja varianssin. Odotusarvo on

$$\mathbf{E}\, S_n = 2^n \mathbf{E}\, \psi_{k,n}\,.$$

Koska $\mathbf{E}\, \psi_{k,n} = \mathbf{E}\, \nabla_+ B^j(t_k) \nabla_+ B^l(t_k) = \Big(\mathbf{E}\, \nabla_+ B_j(t_k)\Big)^2 = 0$, niin $\mathbf{E}\, S_n = 0$. Siispä

$$\mathbf{V}\, S_n = 2^n \mathbf{E}\, \psi_{k,n}^2$$

Koska $\mathbf{E}\, \psi_{k,n}^2 = \Big(\mathbf{E}\, (\nabla_+ B_j(t_k))^2\Big)^2 = 2^{-2n}$, niin $\mathbf{V}\, S_n = 2^{-n}$. Siispä $S_n \to 0$ avaruudessa L^2. Koska toisaalta $S_n \to \langle B^j, B^l \rangle_t$ avaruudessa L^2, niin väite seuraa.

2. Palautuvuuden yhteydessä (ja aiemmin) käytimme tietoa, että $\tau < \infty$ $\mathbf{P}_x$-melkein varmasti, kun τ on poistumishetki väliltä $(0, 2r)$ ja $x \in (0, 2r)$. Osoita hieman vähemmän eli näytä

$$\sup_{x \in (0,2r)} \mathbf{P}_x\,(\,\tau > 1\,) \le \rho \quad \text{ja} \quad \sup_{x \in (0,2r)} \mathbf{P}_x\,(\,\tau > 2\,) \le \rho^2,$$

kun $\rho = \mathbf{P}_0\,(\,|B_1| \le r\,)$.
Ratkaisuehdotus: Jos lähdemme pisteestä $x \in (0, 2r)$ ja $\tau > 1$, niin tiedämme, että ajanhetkellä $t = 1$ Brownin liike ei ole poisunut väliltä $(0, 2r)$. Siispä

$$\mathbf{P}_x\,(\,\tau > 1\,) \le \mathbf{P}_x\,(\,|B_1 - r| < r\,)\,.$$

Voimme siirtää origon pisteeseen x, jolloin

$$\mathbf{P}_x\,(\,\tau > 1\,) \leq \mathbf{P}_0\,(\,|B_1 + x - r| < r\,) \leq \sup_{x\in(0,2r)} \mathbf{P}_0\,(\,|B_1 + x - r| < r\,) =: \kappa$$

jokaisella $x \in (0, 2r)$. Määräämme tämän supremumin κ hieman myöhemmin.

Haluamme vielä osoittaa, että $\kappa = \rho$ ja että

$$\mathbf{P}_x\,(\,\tau > 2\,) \leq \rho^2$$

jokaisella $x \in (0, 2r)$. Jos tiedämme, että $\kappa = \rho$, niin voimme vastaavasti osoittaa, että

$$\mathbf{P}_x\,(\,\tau > 2\,) \leq \kappa^2.$$

Nyt tapahtuma $\{\tau > 2\}$ voidaan esittää myös muodossa $\{\tau > 1, \tilde{\tau} > 1\}$, kun $\tilde{\tau}$ poistumishetki väliltä $(0, 2r)$ aikasiirretylle Brownin liikkeelle $\widetilde{B}_t := B_{t+1}$.

Nyt satunnaismuuttuja $[\,\tilde{\tau} > 1\,]$ on $\mathscr{T}_1$-mitallinen, missä $\mathscr{T}_1 = \sigma\{\ B_s :\ \ s \geq 1\ \}$ on tulevaisuus ajanhetkellä $t = 1$. Siispä aikaisemmin harjoituksissa osoittamamme Markovin ominaisuuden yleistyksen avulla

$$\mathbf{E}\,([\,\tilde{\tau} > 1\,]\,|\,\mathscr{H}_1) = \mathbf{E}\,([\,\tilde{\tau} > 1\,]\,|\,B_1)$$

joten

$$\mathbf{P}\,(\,\tilde{\tau} > 1\,|\,\mathscr{H}_1\,) = \mathbf{P}\,(\,\tilde{\tau} > 1\,|\,B_1\,) = \mathbf{P}\left(\,\tilde{\tau} > 1\,|\,\widetilde{B}_0\right).$$

Koska tapahtuma $\{\tau > 1\}$ puolestaan on $\mathscr{H}_1$-mitallinen, niin olemme päätelleet, että

$$\mathbf{P}\,(\,\tau > 1, \tilde{\tau} > 1\,|\,\mathscr{H}_1\,) = [\,\tau > 1\,]\mathbf{P}\left(\,\tilde{\tau} > 1\,|\,\widetilde{B}_0\right).$$

Nyt voimme päätellä kuten edellä, eli koska $\tau > 1$, niin $B_1 = \widetilde{B}_0 \in (0, 2r)$. Erityisesti siis

$$[\,\tau > 1\,]\mathbf{P}\left(\,\tilde{\tau} > 1\,|\,\widetilde{B}_0\right) \leq [\,\tau > 1\,] \sup_{x\in(0,2r)} \mathbf{P}_x\,(\,\tau > 1\,) \leq [\,\tau > 1\,]\kappa$$

Tässä käytimme tietoa, että $\widetilde{B}$ on myös Brownin liike, joten ehdollinen todennäköisyys sille, että $\tilde{\tau} > 1$, kun $\widetilde{B}_0 = x$ on sama kuin ehdollinen todennäköisyys sille, että $\tau > 1$, kun $B_0 = x$.

Siispä voimme nyt ottaa odotusarvot puolittain ja saamme, että

$$\mathbf{P}_x\,(\,\tau > 2\,) = \mathbf{E}_x\,\mathbf{P}\,(\,\tau > 1, \tilde{\tau} > 1\,|\,\mathscr{H}_1\,) \leq \mathbf{E}_x\,\kappa[\,\tau > 1\,] = \kappa\mathbf{P}_x\,(\,\tau > 1\,) \leq \kappa^2.$$

Nyt haluaisimme vielä osoittaa, että $\rho = \kappa$. Jos

$$f(x) = \mathbf{P}_0\,(\,|B_1 + x - r| < r\,) = \mathbf{P}\,(\,-x < N < 2r - x\,) = \mathbf{P}\,(\,N \in I_x\,)$$

missä $N \sim \mathfrak{N}(0,1)$ ja $I_x := (-x, 2r-x)$. Välin I_x pituus on koko ajan vakio $2r$, joten tiedämme, että f on suurimmillaan kun I_x on keskitetty 0:n ympäri. Tällöin $I_x = (-r, r)$, joten $x = r$ ja siis

$$\kappa = \sup_{x \in (0,2r)} f(x) = f(r) = \mathbf{P}_0\left(\, |B_1| < r\,\right)$$

3. Näytä, että d-ulotteinen Brownin liike on rotaatioiden suhteen invariantti eli näytä, että jos R on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^d$ rotaatio, niin $\widetilde{B}_t := RB_t$ on Brownin liike.
Ratkaisuehdotus: Jos R on rotaatio, niin lineaarialgebran kurssilta tiedämme, että $R^\top R = \mathrm{I}$. Nyt siis $\widetilde{B}_t$ on lineaarinen muunnos Gaussisesta prosessista, joten $\widetilde{B}_t$ on Gaussinen prosesi.

Prosessin kunkin komponentin odotusarvo on aina nolla, sillä

$$\mathbf{E}\,\widetilde{B}^j_t \;= \sum_k R^{kj}\mathbf{E}\,B^k_t \;= 0.$$

Lisäksi kunkin komponentin kovarianssiprosessi on helposti laskettavissa, sillä

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\widetilde{B}^j_t\widetilde{B}^j_s \;&= \sum_{k,l} R^{kj}R^{lj}\mathbf{E}\,B^k_tB^l_s \;= (t\wedge s)\sum_{k,l} R^{kj}R^{lj}[\,k=l\,] = (t\wedge s)\sum_k (R^\top)^{jk}R^{kj}\\ &= (t\wedge s)(R^\top R)^{jj} = (t\wedge s)\mathrm{I}^{jj} = t\wedge s.\end{aligned}$$

Tästä seuraakin jo, että $\widetilde{B}^j_t$ on aina yksiulotteinen Brownin liike, sillä nyt lisäykset ovat korreloimattomia, koska

$$\mathbf{E}\,\widetilde{B}^j_t(\widetilde{B}^j_s - \widetilde{B}^j_t) \;= t - t = 0$$

ja koska Gaussisille prosesseille korreloimattomuus takaa riippumattomuuden. Vastaavasti voimme laskea,

$$\mathbf{E}\,\widetilde{B}^j_t\widetilde{B}^k_s \;= (t\wedge s)(R^\top R)^{jk} = 0$$

kun $j \neq k$. Tämä ei kuitenkaan vielä (meidän tiedoilla siis) riitä, joten haluamme osoittaa, että

$$\mathbf{E}\,\exp(i(\alpha\cdot\xi))\exp(i(\beta\cdot\eta)) \;= \mathbf{E}\,\exp(i(\alpha\cdot\xi))\,\mathbf{E}\,\exp(i(\beta\cdot\eta))$$

jokaisella $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, kun $\xi = (\widetilde{B}^j(t_1), \ldots, \widetilde{B}^j(t_n) - \widetilde{B}^j(t_{n-1}))$ ja $\eta = (\widetilde{B}^m(t_1), \ldots, \widetilde{B}^m(t_n) - \widetilde{B}^m(t_{n-1}))$. Tämä takaa satunnaismuuttujien ξ ja η riippumattomuuden ja siten prosessien $\widetilde{B}^j$ ja $\widetilde{B}^m$ riippumattomuuden.

Nyt

$$\alpha \cdot \xi = \sum_k \alpha^k (\widetilde{B}^j(t_k) - B^j(t_{k-1})) = \sum_{k,l} \alpha^k R^{jl} \nabla_- B^l(t_k)$$

ja vastaavasti

$$\beta \cdot \eta = \sum_{k,l} \beta^k R^{ml} \nabla_- B^l(t_k)$$

Siispä

$$\exp(i(\alpha \cdot \xi + \beta \cdot \eta)) = \prod_{k,l} \exp(i(\alpha^k R^{jl} + \beta^k R^{ml}) \nabla_- B^l(t_k))$$

Koska prosessit B^l ovat keskenään riippumattomia, niin

$$\mathbf{E} \exp(i(\alpha \cdot \xi + \beta \cdot \eta)) = \prod_l \mathbf{E} \prod_k \exp(i(\alpha^k R^{jl} + \beta^k R^{ml}) \nabla_- B^l(t_k))$$

Koska edelleen lisäykset $\nabla_- B^l(t_k)$ ovat keskenään riippumattomia, voimme edelleen päätellä, että

$$\mathbf{E} \exp(i(\alpha \cdot \xi + \beta \cdot \eta)) = \prod_{l,k} \mathbf{E} \exp(i(\alpha^k R^{jl} + \beta^k R^{ml}) \nabla_- B^l(t_k))$$

Nyt satunnaismuuttuja $\xi_{kjlm} := (\alpha^k R^{jl} + \beta^k R^{ml}) \nabla_- B^l(t_k)$ on normaalijakautunut, joten sen karakteristinen funktio on

$$\mathbf{E} \exp(i(\alpha^k R^{jl} + \beta^k R^{ml}) \nabla_- B^l(t_k)) = \exp\Big(- \tfrac{1}{2} (\alpha^k R^{jl} + \beta^k R^{ml})^2 (\nabla_- t_k)^2 \Big).$$

Siispä

$$\mathbf{E} \exp(i(\alpha \cdot \xi + \beta \cdot \eta)) = \exp\Big(- \tfrac{1}{2} \sum_{l,k} (\alpha^k R^{jl} + \beta^k R^{ml})^2 (\nabla_- t_k)^2 \Big).$$

Koska

$$\sum_k c^k \sum_l R^{jl} R^{pl} = \sum_k c^k [\, p = j \,]$$

niin päättelemme, että

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \exp(i(\alpha \cdot \xi + \beta \cdot \eta)) &= \exp\Big(- \tfrac{1}{2} \sum_{l,k} (\alpha^k R^{jl})^2 (\nabla_- t_k)^2 \Big) \exp\Big(- \tfrac{1}{2} \sum_{l,k} (\beta^k R^{ml})^2 (\nabla_- t_k)^2 \Big) \\ &= \mathbf{E} \exp(i(\alpha \cdot \xi))\, \mathbf{E} \exp(i(\beta \cdot \eta))\end{aligned}$$

Siispä $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ ja $\widetilde{B}^j \perp\!\!\!\perp \widetilde{B}^m$, joten $\widetilde{B}$ on Brownin liike.

4. Näytä luennoissa mainittu tieto, että tasossa (eli $\mathbb{R}^2$:ssa)

$$\mathbf{P}_0 \, (\, \tau_0 < \infty \,) = 0$$

käyttämällä vahvaa Markovin ominaisuutta.

Ratkaisuehdotus: Olkoon η poistumishetki r säteisestä origokeskisestä kuulasta. Tällöin

$$\mathbf{P}\,(\,\tau_0 = \infty \,|\, \mathscr{H}_\eta\,) = \mathbf{P}_{B(\eta)}\,(\,\tau_0 = \infty\,)$$

melkein varmasti. Koska $|B(\eta)| = r$, niin tiedämme jo, että $\mathbf{P}_{B(\eta)}\,(\,\tau_0 = \infty\,) = 1$. Siispä ottamalla odotusarvot puolittain saamme, että

$$\mathbf{P}_0\,(\,\tau_0 = \infty\,) = \mathbf{E}_0\,\mathbf{P}\,(\,\tau_0 = \infty \,|\, \mathscr{H}_\eta\,) = \mathbf{E}_0\,1 = 1.$$

Siispä $\mathbf{P}_0\,(\,\tau_0 < \infty\,) = 1$.

5. Oletamme, että on olemassa 1-ulotteinen prosessi X_t, joka toteuttaa stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\,\mathrm{d}B_t + b(X_t)\,\mathrm{d}t,$$

kun $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat jotain rajoitettuja C^2-funktioita. Olkoon $Z_t := f(X_t)$, kun $f \in C^2$ on rajoitettu.

i) Määrää $\mathrm{d}Z_t$ ja $\mathrm{d}\langle\, Z\,\rangle_t$.

ii) Minkä differentiaaliyhtälön funktion f olisi toteutettava, jotta Z_t olisi lokaali martingaali?

Ratkaisuehdotus: Kohta *i)* saadaan käyttämällä Itōn kaavaa, jonka mukaan

$$\mathrm{d}Z_t = f'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \tfrac{1}{2}f''(X_t)\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t$$

Koska $\mathrm{d}X_t = a(X_t)\,\mathrm{d}B_t + b(X_t)\,\mathrm{d}t$, niin $\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t = a(X_t)^2\,\mathrm{d}t$, ja siispä

$$\mathrm{d}Z_t = f'(X_t)a(X_t)\,\mathrm{d}B_t + \Big(f'(X_t)b(X_t) + \tfrac{1}{2}f''(X_t)a(X_t)^2\Big)\,\mathrm{d}t =: \mathrm{d}M_t + \mathrm{d}A_t$$

Nyt jälkimmäinen termi A on lokaalisti rajoitetusti heilahteleva, joten

$$\mathrm{d}\langle\, Z\,\rangle_t = \mathrm{d}\langle\, M\,\rangle_t = f'(X_t)^2 a(X_t)^2\,\mathrm{d}t$$

Kohta *ii)* on nyt helppo. Prosessi Z_t on lokaali martingaali, jos $Z_t = M_t$ eli jos $A_t = 0$. Siispä päättelemme, että jos

$$\tfrac{1}{2}a(x)^2 f''(x) + b(x)f'(x) = 0$$

niin $A_t = 0$.