Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 8

1. Näytä suoraan osittaisintegrointikaavalla, että

$$\mathrm{d}(X^4)_t = 4X_t^3\,\mathrm{d}X_t + 6X_t^2\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t.$$

Ratkaisuehdotus: Tiedämme suoraan osittaisintegrointikaavalla, että jos $Y_t = X_t^2$, niin

$$\mathrm{d}Y_t^2 = 2Y_t\,\mathrm{d}Y_t + \,\mathrm{d}\langle\, Y\,\rangle_t.$$

Koska tiedämme osittaisintegrointikaavan nojalla, että

$$\mathrm{d}Y_t = 2X_t\,\mathrm{d}X_t + \,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t =: \,\mathrm{d}M_t + \,\mathrm{d}A_t$$

niin tiedämme, että $\langle\, Y\,\rangle_t = \langle\, M\,\rangle_t$. Siispä

$$\mathrm{d}\langle\, Y\,\rangle_t = 4X_t^2\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t.$$

Liitännäisyyslain avualla saamme siten, että

$$\mathrm{d}Y_t^2 = 4Y_tX_t\,\mathrm{d}X_t + 2Y_t\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t + 4X_t^2\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t. = 4X_t^3\,\mathrm{d}X_t + 6X_t^2\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_t.$$

2. Näytä Lemma 5.43 eli

i) Itōn kaavan totetuttavien funktioiden joukko $\mathscr{I}$ on lineaarinen

ii) jos $f \in \mathscr{I}$, niin $g(x_1,\dots,x_d) = x_j f(x_1,\dots,x_d)$ kuuluu myös joukkoon $\mathscr{I}$.

Ratkaisuehdotus: Kohta *i*) on helppo. Jos $f^1, f^2 \in \mathscr{I}$, niin $f^1, f^2 \in C^2$, joten erityisesti $f := f^1 + \alpha f^2 \in C^2$. Edelleen, koska $f^j \in \mathscr{I}$, niin

$$f^j(X_t) - f^j(X_0) = \int_0^t \sum_k f_k^j(X_t)\,\mathrm{d}X_t^k + \tfrac{1}{2}\sum_{k,l} f_{kl}^j(X_t)\,\mathrm{d}\langle\, X^k, X^l\,\rangle_t$$

kun $j = 1$ tai $j = 2$. Laskemalla yhteen saamme, että

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \sum_k f_k(X_t)\,\mathrm{d}X_t^k + \tfrac{1}{2}\sum_{k,l} f_{kl}(X_t)\,\mathrm{d}\langle\, X^k, X^l\,\rangle_t.$$

Kohta *ii*) on hieman työläämpi, mutta ei hankala. Merkitsemme $Y_t := f(X_t)$ ja sovellamme osittaisintegrointikaavaa prosessiin $Z_t = Y_t X_t^j = g(X_t)$. Siispä

$$\mathrm{d}Z_t = X_t^j \,\mathrm{d}Y_t + Y_t \,\mathrm{d}X_t^j + \mathrm{d}\langle X^j, Y \rangle_t.$$

Oletuksen nojalla

$$\mathrm{d}Y_t = \sum_k f_k(X_t)\,\mathrm{d}X_t^k + \tfrac{1}{2}\sum_{kl} f_{kl}(X_t)\,\mathrm{d}\langle X^k, X^l \rangle_t =: \mathrm{d}M_t + \mathrm{d}A_t$$

Liitännäisyyslaien avulla havaitsemme siten, että

$$\mathrm{d}Z_t = \sum_k X_t^j f_k(X_t)\,\mathrm{d}X_t^k + \tfrac{1}{2}\sum_{kl} X_t^j f_{kl}(X_t)\,\mathrm{d}\langle X^k, X^l \rangle_t + Y_t\,\mathrm{d}X_t^j + \mathrm{d}\langle X^j, Y \rangle_t.$$

Koska $\langle X^j, Y \rangle_t = \langle X^j, M \rangle_t$, niin voimme laskea, että

$$\mathrm{d}\langle X^j, Y \rangle_t = \sum_k f_k(X_t)\,\mathrm{d}\langle X^j, X^k \rangle_t.$$

Voimme siten kirjoittaa, että

$$\mathrm{d}Z_t = \sum_k W_t^{jk}\,\mathrm{d}X_t^k + \sum_{kl} R_t^{jkl}\,\mathrm{d}\langle X^k, X^l \rangle_t$$

yhdistämällä termit joissa on sama differentiaaliosa. Voimme nyt laskea, mitä kukin termi on. Kun $j \neq k$, niin

$$W_t^{jk} = X_t^j f_k(X_t) = g_k(X_t).$$

Jos $j = k$, niin

$$W_t^{jj} = X_t^j f_j(X_t) + Y_t = X_t^j f_k(X_t) + f(X_t) = g_j(X_t),$$

sillä $g_j(x) = f(x) + x_j f_j(x)$. Edelleen, kun $j \neq k$ ja $j \neq l$, niin $g_{kl}(x) = x_j f_{kl}(x)$, joten havaitsemme, että

$$R_t^{jkl} = \tfrac{1}{2} X_t^j f_{kl}(X_t) = \tfrac{1}{2} g_{kl}(X_t).$$

Jos $j = k$ ja $j \neq l$, niin $g_{jl}(x) = \partial_l(f(x) + x_j f_j(x)) = f_l(x) + x_j f_{jl}(x)$. Hakemalla vastaavat termit, niin näemme, että

$$R_t^{jjl} = \tfrac{1}{2} X_t^j f_{jl}(X_t) + X_t^j f_l(X_t).$$

Jos taas $j \neq k$ ja $j = l$, niin

$$R_t^{jkj} = \tfrac{1}{2} X_t^j f_{kj}(X_t) = \tfrac{1}{2} X_t^j f_{jk}(X_t)$$

Koska kovarianssiprosessi on symmetrinen, niin

$$R_t^{jjk} \langle X^j, X^k \rangle_t + R_t^{jkj} \langle X^k, X^j \rangle_t = (R_t^{jjk} + R_t^{jkj}) \langle X^j, X^k \rangle_t.$$

Nyt $R_t^{jjk} + R_t^{jkj} = g_{jk}(X_t) = \frac{1}{2}(g_{jk}(X_t) + g_{kj}(X_t))$, joten

$$R_t^{jjk} \langle X^j, X^k \rangle_t + R_t^{jkj} \langle X^k, X^j \rangle_t = \tfrac{1}{2} g_{jk}(X_t) \langle X^j, X^k \rangle_t + \tfrac{1}{2} g_{kj}(X_t) \langle X^k, X^j \rangle_t.$$

Jäljellä on tapaus $j = k = l$, jolloin

$$R_t^{jjj} = \tfrac{1}{2} X_t^j f_{jj} + f_j(X_t).$$

Koska $g_{jj}(x) = \partial_j(f(x) + x_j f_j(x)) = f_j(x) + f_j(x) + x_j f_{jj}(x)$, niin $\frac{1}{2} g_{jj}(x) = f_j(x) + \frac{1}{2} x_j f_{jj}(x)$, eli $R_t^{jjj} = \frac{1}{2} g_{jj}(X_t)$. Olemme siten päätelleet, että

$$\mathrm{d}Z_t = \sum_k g_k(X_t)\,\mathrm{d}X_t^k + \tfrac{1}{2} \sum_{kl} g_{kl}(X_t)\,\mathrm{d}\langle X^k, X^l \rangle_t.$$

Tämä tarkoittaa kuitenkin, että $g \in \mathscr{I}$, mikä oli väite.

3. Etsi sellainen funktio $f(x, y)$, että $B_t^6 + f(B_t, t)$ on martingaali Brownin liikkeen historian suhteen.

Ratkaisuehdotus: Tiedämme, jos $g(x, y) = x^6 + f(x, y)$, niin $g(B_t, t)$ on martingaali, jos $\frac{1}{2} f_{11} + f_2 = 0$. Kuten luennoissa tehdään aluksi yrite, että $f^0(x, y) = 0$ eli yrite $g^0(x, y) = x^6$. Jos olemme jo määränneet yritteen $g^k(x, y)$, niin määrittelemme kuten luennoissa $k + 1$:n yritteen seuraavasti:

$$\tfrac{1}{2} g_{11}^k + g_2^k = h^k \Longrightarrow g^{k+1}(x, y) = g^{k+1}(x, y) - \tfrac{1}{2} \int_0^y h^k(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

Sovelletaan nyt tätä kaavaa. Aluksi $g^0(x, y) = x^6$, joten

$$g_1^0(x, y) = 6x^5 \Longrightarrow \tfrac{1}{2} g_{11}^0(x, y) + g_2^0(x, y) = 15x^4.$$

Siispä

$$g^1(x, y) = x^6 - 15x^4 y.$$

Edelleen

$$g^1_1(x,y) = 6x^5 - 60x^3y \Longrightarrow \tfrac{1}{2}g^1_{11}(x,y) = 15x^4 - 90x^2y,$$

ja

$$g^1_2(x,y) = -15x^4$$

joten

$$h^1(x,y) = -90x^2y \Longrightarrow g^2(x,y) = x^6 - 15x^4y + 45x^2y^2.$$

Taas laskemme, joten

$$\tfrac{1}{2}g^2_{11}(x,y) = 15x^4 - 90x^2y + 45y^2$$

ja

$$g^2_2(x,y) = -15x^4 + 90x^2$$

joten $h^2(x,y) = 45y^2$ ja siten

$$g^3(x,y) = x^6 - 15x^4y + 45x^2y^2 - 15y^3.$$

Koska nyt

$$g^3_{11} = 15x^4 - 90x^2y + 45y^2$$

ja

$$g^3_2 = -15x^4 + 90x^2y - 45y^2$$

joten $h^3(x,y) = 0$ eli g^3 toteuttaa vaaditun yhtälön. Nyt siis $f(x,y) = -15x^4y + 45x^2y^2 - 15y^3$ on eräs kysytyistä funktioista.

4. Sovella edellisen tehtävän martingaalia poistumishetken $\tau = \inf\{\ t > 0 :\ |B_t| > r\ \}$ kolmas momentti $\mathbf{E}_0\,\tau^3$.

Ratkaisuehdotus: Tehdään tämä kerran hyvin yksityiskohtaisesti, jotta pysäyttäminen alkaisi hieman selvetä. Edellisen tehtävän nojalla

$$X_t := B_t^6 - 15B_t^4t + 45B_t^2t^2 - 15t^3$$

on martingaali. Koska tämä ei kuitenkaan ole tasaisesti integroituva, niin katkaisemme sen eli määrittelemme prosessin $Z_t := X_{t\wedge n}$. Tämä prosessi on neliöintegroituva, sillä

$$\mathbf{E}\,Z_t^2 \le \mathbf{E}\,X_n^2 \le c_1\mathbf{E}\,B_n^{12} + c_2n^2\mathbf{E}\,B_n^8 + c_3n^4\mathbf{E}\,B_n^4 + c_4n^6 \le Cn^6$$

joten

$$\sup_{t\geq 0} \mathbf{E}\, Z_t^2 \ < \infty.$$

Voimme siten soveltaa optinaalisen pysäyttämisen lausetta prosessiin Z pysähdyshetkellä τ ja saamme, että

$$\mathbf{E}_0\, Z_0 \ = \mathbf{E}_0\, Z_\tau$$

Vasen puoli on $\mathbf{E}_0\, Z_0 \ = \mathbf{E}_0\, X_0 \ = 0$. Oikea puoli on puolestaan

$$\mathbf{E}_0\, B^6_{\tau\wedge n} \ - 15\mathbf{E}_0\, B^4_{\tau\wedge n}(\tau \wedge n) \ + 45\mathbf{E}_0\, B^2_{\tau\wedge n}(\tau \wedge n)^2 \ - 15\mathbf{E}_0\, (\tau \wedge n)^3$$

Kuinka laskemme raja-arvot ? Koska Brownin liikkeen jatkuvuuden nojalla $|B_{\tau\wedge n}| \leq r$, niin voimme soveltaa rajoitetun suppenemisen lausetta ja havaitsemme, että

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_0\, B^6_{\tau\wedge n} \ = \mathbf{E}_0\, B^{\,6}_{\tau} = r^6.$$

Seuraavaan termiin tarvisemme lisäksi tiedon, että $\mathbf{E}_0\, \tau \ = r^2 < \infty$. Tällöin voimme soveltaa dominoidun suppenemisen lausetta majoranttina $r^4\tau$ ja siten

$$\lim_{n\to\infty} 15\mathbf{E}_0\, B^4_{\tau\wedge n}(\tau \wedge n) \ = 15\mathbf{E}_0\, B^4_\tau \tau \ = 15r^4\mathbf{E}_0\, \tau \ = 15r^6.$$

Kolmanteen termiin käytämme tietoa, että $\mathbf{E}_0\, \tau^2 \ = 5/3r^4$ ja siten

$$\lim_{n\to\infty} 45\mathbf{E}_0\, B^4_{\tau\wedge n}(\tau \wedge n) \ = 45r^2\mathbf{E}_0\, \tau^2 \ = 15 \times 5r^6 = 75r^6.$$

Olemme siten päätelleet, että

$$\lim_{n\to\infty} 15\mathbf{E}_0\, (\tau \wedge n)^3 \ = 61r^6.$$

Voimme nyt soveltaa monotonisen suppenemisen lausetta, joka osoittaa, että pysähdyshetkellä τ on kolmas momentti ja siten

$$\mathbf{E}_0\, \tau^3 \ = \frac{61}{15} r^6.$$

5. Kappaleessa 3 törmäsimme Brownin siltaan stokastisena differentiaaliyhtälönä

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{X_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

Näytä, että prosessi $Y_t = X_t/(1-t)$ toteuttaa helpomman stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\mathrm{d}B_t}{1-t}.$$

Ratkaisuehdotus: Osittaisintegrointikaavan nojalla

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\mathrm{d}X_t}{1-t} + \frac{X_t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{X_t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}B_t}{1-t} + \frac{X_t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}B_t}{1-t}.$$

Tästä olisi helppo jatkaa ja määritellä prosessi Y_t eksplisiittisesti. Integrandi $H_t = (1-t)^{-1}[\, t \in (0, 1-\varepsilon]\,]$ kuuluu luokkaan $\Pi_2(B)$ jokaisella $\varepsilon > 0$, sillä

$$\mathbf{E}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\langle\, B\,\rangle_t}{(1-t)^2} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2} = \int_0^{1-\varepsilon} \mathrm{d}(1-t)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} - 1 < \infty$$

Siispä

$$Y_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{1-s}$$

välillä $[0,1)$ ja siten

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}B_s}{1-s}$$

välillä $[0,1)$. Huomaamme, että $\mathbf{E}\,X_t^2 = (1-t)^2\mathbf{E}\,Y_t^2$ ja koska

$$\mathbf{E}\,Y_t^2 = \mathbf{E}\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)}^2 = \frac{1}{1-t} - 1$$

niin $\mathbf{E}\,X_t^2 = (1-t) - (1-t)^2 = (1-t)\big(1-(1-t)\big) = t(1-t)$. Vaikuttaisi siten, että prosessi X olisi symmetrinen pisteen $t = \frac{1}{2}$ ympäri. Jos kerran $X_0 = 0$, niin tällöin voisi odottaa, että myös $X_1 = 0$ vaikka tätä arvoa ei ole määritelty. Voimme tietenkin *määritellä*

$$X_1 = \lim_{t\uparrow 1} X_t = 0$$

jos tietäisimme, että kyseinen raja-arvo on melkein varmasti olemassa. Jätämme tämän osoittamisen kuitenkin toiseen kertaan.