Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 7

1. Näytä, että kuvaus $M \mapsto \| M \|_{\mathscr{M}^2}$, kun

$$\| M \|^2_{\mathscr{M}^2} = \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}\, M_t^2$$

on normi joukossa $\mathscr{M}^2 = \{ M : \ M \text{ on martingaali ja } \| M \|_{\mathscr{M}^2} < \infty \}$.

Ratkaisuehdotus: Helpoin ja nopein todistus tälle, on käyttää martingaalikonvergenssilausetta. Olkoon $M \in \mathscr{M}^2$. Tällöin $X_t := M_t^2$ on integroituva kaikilla t, joten erityisesti X on alimartingaali. Alimartingaaliominaisuuden nojalla $t \mapsto \mathbf{E}\, X_t$ on kasvava funktio, sillä $\mathbf{E}\, X_t = \mathbf{E}\,\mathbf{E}\,(X_t \,|\, \mathscr{F}_s) \geq \mathbf{E}\, X_s$ aina, kun $t \geq s$. Koska $\| M \|^2 = \sup \mathbf{E}\, X_t$, niin kasvavuuden takia

$$\| M \|^2 = \lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\, X_t = \lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\, M_t^2 .$$

Koska Doobin martingaaliepäyhtälön nojalla

$$\mathbf{E} \sup_{s \leq t} (M_s - M_0)^2 \leq 4 \sup_t \mathbf{E}\, (M_t - M_0)^2 < \infty$$

niin martingaalikonvergenssilauseen oletukset ovat voimassa, eli löydämme satunnaismuuttujan M_∞, joka toteuttaa ehdon

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\, (M_t - M_\infty)^2 = 0.$$

Kolmioepäyhtälön avulla näemme siten, että

$$\| M \|^2 = \lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\, M_t^2 = \lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\, (M_t - M_\infty + M_\infty)^2 = \mathbf{E}\, M_\infty^2$$

Koska $\mathbf{E}\, M_\infty^2 = \| M_\infty \|_2^2$ on tavallinen L^2-normin neliö, niin $\| M \| = \| M_\infty \|_2$. Koska oikea puoli määrää normin, niin myös vasen puoli on normi.

Täydellisyyden vuoksi osoitamme, että $\mathbf{E}\, X^2 =: \| X \|_2^2$ määrittelee normin toisen momentin omaavien satunnaismuuttujien joukossa. Koska X^2 on positiivinen satunnaismuuttuja, niin $\| X \|_2^2 \geq 0$. Jos $\| X \|_2^2 = \mathbf{E}\, X^2 = 0$, niin

$$0 = \mathbf{E}\, X^2 \geq \mathbf{E} \left(X^2 [\, X^2 \geq \varepsilon^2 \,] \right) \geq \varepsilon^2 \mathbf{P}\, (\, |X| \geq \varepsilon \,)$$

jokaisella $\varepsilon > 0$. Siispä $\mathbf{P}\,(\,|X| \geq \varepsilon\,) = 0$ jokaisella $\varepsilon > 0$, joten

$$\mathbf{P}\,(\,|X| > 0\,) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_+} \mathbf{P}\,(\,|X| \geq 1/n\,) = 0$$

joten $\mathbf{P}\,(\,X = 0\,) = 1$ eli $X = 0$ melkein varmasti. Edelleen $\|\,\lambda X\,\|_2^2 = \lambda^2 \|\,X\,\|_2^2$, joten $\|\,\lambda X\,\|_2 = |\lambda| \|\,X\,\|_2$. Kolmioepäyhtälön osoittamiseen sovellamme Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, jonka avulla

$$\begin{aligned}\|\,X + Y\,\|_2^2 &= \|\,X\,\|_2^2 + 2\mathbf{E}\,XY\; + \|\,Y\,\|_2^2 \leq \|\,X\,\|_2^2 + 2\|\,X\,\|_2 \|\,Y\,\|_2 + \|\,Y\,\|_2^2 \\ &= (\|\,X\,\|_2 + \|\,Y\,\|_2)^2.\end{aligned}$$

2. Näytä, että kun $H \in \Pi_3(X)$, niin

$$\tau_n = \inf\{\, t > 0 : \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle > n\,\}$$

on pysähdyshetki ja että $\tau_n \uparrow \infty$ melkein varmasti.

Ratkaisuehdotus: Merkitsemme

$$Y_t := \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle.$$

Kun $H \in \Pi_3(X)$, niin $Y_t < \infty$ melkein varmasti jokaisella $t \geq 0$. Tästä seuraa integraalin määritelmän nojalla, että Y_t on jatkuva prosessi, sillä

$$Y_{t+h} - Y_t = \int H_s^2 [\, s \in (t, t+h]\,]\,\mathrm{d}\langle\, X\,\rangle_s$$

joten dominoidun suppenemisen lauseen nojalla $Y_{t+h} \to Y_t$, kun $h \downarrow 0$. Siispä Y on oikealta jatkuva. Vasemmalta jatkuvuus osoitetaan samalla tavalla.

Edelleen H_t ja $\langle\, X\,\rangle_t$ ovat ennustettavia, joten Y_t on ainakin adaptoitu filtraation $\mathscr{F}_t$ suhteen. Nyt

$$\tau_n = \inf\{\, t > 0 : \; Y_t \in [n, \infty)\,\}$$

on luentojen Lauseen 3.13 mukaan $(\mathscr{F}_t)$-pysähdyshetki, sillä vaikka Lause on muotoiltu Brownin liikkeelle, todistuksessa tarvitsemme ainoastaan prosessin jatkuvuutta ja adaptoituvuutta.

Edelleen $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ on selviö, joten jäljellä on väite $\tau_n \uparrow \infty$. Tämäkin seuraa prosessin Y_t jatkuvuudesta, sillä jos $\tau_n \to \tau_\infty$, niin $Y_t = \infty$ jokaisella $t \geq \tau_\infty$. Tällaiset polut eivät ole jatkuvia, joten $\tau_\infty = \infty$ melkein varmasti.

3. Näytä Kunitan–Watanaben epäyhtälön todistuksen puuttuva osa eli

$$(\langle X, Y \rangle_t - \langle X, Y \rangle_s)^2 \le (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s)(\langle Y \rangle_t - \langle Y \rangle_s)$$

tarkastelemalla martingaalin $X + \lambda Y$ varianssiprosessia reaaliluvun λ funktiona.
Ratkaisuehdotus: Tarkastellaan vihjeen mukaisesti martingaalin $X + \lambda Y$ varianssiprosessia. Tämä on laskettavissa

$$\langle X + \lambda Y \rangle_t = \langle X + \lambda Y, X + \lambda Y \rangle_t = \langle X \rangle_t + \lambda^2 \langle Y \rangle_t + 2\lambda \langle X, Y \rangle_t =: p_t(\lambda)$$

joten $p(\lambda) := p_t(\lambda) - p_s(\lambda) =: a\lambda^2 + b\lambda + c$ on toisen asteen polynomi. Tiedämme peruskoulun tiedoilla, että funktiolla p on 0, 1 tai 2 nollakohtaa. Koska $p(\lambda) = \langle X + \lambda Y \rangle_t - \langle X + \lambda Y \rangle_s \ge 0$, niin polynomilla p on korkeintaan 1 nollakohta. Tämä tarkoittaa polynomin p *diskriminantti* $b^2 - 4ac \le 0$. Siispä

$$4(\langle X, Y \rangle_t - \langle X, Y \rangle_s)^2 \le 4(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s)(\langle Y \rangle_t - \langle Y \rangle_s)$$

eli väite seuraa.

4. Näytä, että jos $H, K \in b\Pi_1$ ja X on jatkuva ja rajoitettu martingaali, niin

$$HK \cdot X = H \cdot (K \cdot X)$$

Ratkaisuehdotus: Olkoon nyt $H = H_1 + \cdots + H_n$ $K = K_1 + \cdots + K_n$, missä $H_j(t) = C_j[\, t \in I_j \,]$ ja $K_j(t) = D_j[\, t \in I_j \,]$, missä välit $I_j = (a_j, a_{j+1}]$ ovat erillisiä. Tällöin $H(t)K(t) = \sum_j C_j D_j [\, t \in I_j \,]$, joten

$$(HK \cdot X)_t = \sum_j C_j D_j (X(a_{j+1} \wedge t) - X(a_j))[\, t > a_j \,]$$

Koska

$$Y_t = (K \cdot X)_t = \sum_j D_j (X(a_{j+1} \wedge t) - X(a_j))[\, t > a_j \,],$$

ja

$$(H \cdot Y)_t = \sum_j C_j (Y(a_{j+1} \wedge t) - Y(a_j))[\, t > a_j \,],$$

niin voimme laskea, että

$$\begin{aligned} Y(a_j) &= \sum_k D_k (X(a_{k+1} \wedge a_j) - X(a_k))[\, a_j > a_k \,] \\ &= \sum_{k<j} D_k (X(a_{k+1}) - X(a_k)) \end{aligned}$$

ja siten

$$\begin{aligned}
Y(a_{j+1}\wedge t)[\,t>a_j\,] &= \sum_k D_k(X(a_{k+1}\wedge a_{j+1}\wedge t)-X(a_k))[\,t>a_j\,][\,t\wedge a_{j+1}>a_k\,]\\
&= \sum_k D_k(X(a_{k+1}\wedge a_{j+1}\wedge t)-X(a_k))[\,t>a_j\vee a_k\,][\,j\geq k\,]\\
&= \Big(\sum_{k<j} D_k(X(a_{k+1})-X(a_k)) + D_j(X(a_{j+1}\wedge t)-X(a_j))\Big)[\,t>a_j\,]\\
&= Y(a_j)[\,t>a_j\,] + D_j\Big(X(a_{j+1}\wedge t)-X(a_j)\Big)[\,t>a_j\,].
\end{aligned}$$

Siispä

$$\Big(Y(a_{j+1}\wedge t)-Y(a_j)\Big)[\,t>a_j\,] = D_j\Big(X(a_{j+1}\wedge t)-X(a_j)\Big)[\,t>a_j\,],$$

joten

$$\begin{aligned}
(H\cdot Y)_t &= \sum_j C_j(Y(a_{j+1}\wedge t)-Y(a_j))[\,t>a_j\,]\\
&= \sum_j C_jD_j(X(a_{j+1}\wedge t)-X(a_j))[\,t>a_j\,]\\
&= (HK\cdot X)_t.
\end{aligned}$$

5. Näytä, että jos määrittelemme kovarianssiprosessin erotusten tulojen summan raja-arvona, niin $\langle\, M, A\,\rangle_t = 0$, kun M on jatkuva rajoitettu martingaali ja A on jatkuva rajoitetusti heilahteleva prosessi.

Ratkaisuehdotus: Määritellään approksimoiva prosessi

$$V(M,A)_n(t)$$

aluksi. Merkitään $t_{k,n} = k2^{-n}$ ja $I_{k,n} = (t_{k,n}, t_{k+1,n}]$. Merkitään seuraavassa $\nabla^t_+ a(t_{k,n}) := [\,t>t_{k,n}\,]\Big(a(t\wedge t_{k+1,n})-a(t_{k,n})\Big)$, joka on eräänlainen katkaistu differenssi. Tällöin määrittelemme

$$\nabla^t_+ V(M,A)_n(t_{k,n})[\,t\in I_{k,n}\,] := \nabla^t_+ M(t_{k,n})\nabla^t_+ A(t_{k,n})$$

jokaisella k ja n. Tämä määrää yksikäsitteisen prosessin

$$V(M,A)_n(t) = \sum_k \nabla^t_+ V(M,A)_n(t_{k,n})[\,t>t_{k,n}\,]$$

kunhan asetamme $V(M,A)_n(0) = 0$. Haluamme osoittaa, että tämä prosessi suppenee kohti nollaprosessia, joten määrittelemme avuksi p-varianssin käsitteen. Sanomme, että prosessi X on p-varianssi, jos

$$\langle\!\langle\, X \,\rangle\!\rangle_p^p(t) := \sup_n \sum_k |\nabla_+^t V(M,A)_n(t_{k,n})|^p [\, t > t_{k,n} \,]$$

on äärellisenä olemassa stokastisen suppenemisen mielessä. Tiedämme jo, että martingaaleilla on 2-varianssi. Lisäksi lokaalisti rajoitetusti heilahtelevalla prosessilla on 1-varianssi. Lisäksi havaitsemme, että supremum voidaan korvata raja-arvolla $n \to \infty$.

Määräämme arvion prosessin $V(M,A)$ 1-varianssille, eli arvioimme summaa

$$\sum_k |\nabla_+^t M(t_k)||\nabla_+^t A(t_k)|[\, t > t_k \,].$$

Soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä saamme arvion

$$\begin{aligned}\Big(\sum_k |\nabla_+^t M(t_k)||\nabla_+^t A(t_k)|[\, t > t_k \,]\Big)^2 &\le \sum_k |\nabla_+^t M(t_k)|^2 [\, t > t_k \,] \sum_k |\nabla_+^t A(t_k)|^2 [\, t > t_k \,] \\ &\le \langle\!\langle\, M \,\rangle\!\rangle_2^2 \langle\!\langle\, A \,\rangle\!\rangle_1^1 \sup_k \nabla_+ A(t_k)\end{aligned}$$

Koska A on jatkuva, niin oikea puoli on tasaisesti rajoitettu, joten

$$\langle\!\langle\, V(M,A) \,\rangle\!\rangle_1 \le \langle\!\langle\, M \,\rangle\!\rangle_2^2 \langle\!\langle\, A \,\rangle\!\rangle_1^1 \limsup_{n\to\infty} \sup_k \nabla_+ A(t_{k,n})$$

Kun $n \to \infty$, niin prosessin A jatkuvuuden nojalla $\sup_k \nabla_+ A(t_{k,n}) \to 0$. Olemme siten päätelleet, että $\langle\, V(M,A) \,\rangle_1 = 0$. Koska

$$|\langle\, M, A \,\rangle_t| \le \langle\!\langle\, V(M,A) \,\rangle\!\rangle_1(t) = 0$$

väite seuraa.