Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 6

1. Osoita Lemma 5.17. eli jos $H \in b\Pi_0$ ja X on $(\mathscr{F}_t)$-martingaali, niin $(H \cdot X)_t$ on $(\mathscr{F}_t)$-martingaali.

Ratkaisuehdotus: Määritelmän nojalla $H(s) = C[\, s \in (a, b]\,]$ jollakin $C \in \mathscr{F}_a$ ja $a < b$. Voimme siten päätellä, että

$$(H \cdot X)_t = \int H(s)[\, s \in (0, t]\,]\, \mathrm{d}X_s = C(X_{t\wedge b}) - X_{s\wedge t})$$

Tästä päättelemme, että $(H \cdot X)_t = 0$ jokaisella $t \leq a$, joten $(H \cdot X)_t$ on $\mathscr{F}_t$-mitallinen ja integroituva, kun $t \leq a$. Kun $t > a$, niin $C \in \mathscr{F}_a \subset \mathscr{F}_t$, joten $(H \cdot X)_t$ on $\mathscr{F}_t$-mitallinen jokaisella $t \geq 0$. Integroituvuuskaan ei ole ongelma, sillä

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|(H \cdot X)_t| &\leq \mathbf{E}\, C\mathbf{E}\,\left(|X_{t\wedge b}| + |X_a| \,|\, \mathscr{F}_a\right) \leq 2\|\, C\,\|_\infty \mathbf{E}\,|X_a| + |X_{t\wedge b}| \\ &\leq 2\|\, H\,\|_\infty \mathbf{E}\,|X_b| < \infty.\end{aligned}$$

Jälkimmäinen arvio seurasi siitä, että $|X_t|$ on alimartingaali ja siitä, että $\|\, H\,\|_\infty = \|\, C\,\|_\infty$.

Halaumme vielä osoittaa martingaaliominaisuuden eli että $\mathbf{E}\,((H \cdot X)_t \,|\, \mathscr{F}_s) = (H \cdot X)_s$ aina, kun $t \geq s$.

Jaamme tarkastelun tapauksiin $b \leq s$, $a \leq s < b$, $s < a \leq t$ ja $s \leq t < a$.

Kun $b \leq s$, niin $(H \cdot X)_t = (H \cdot X)_s = (H \cdot X)_b$. Koska $(H \cdot X)_b$ on $\mathscr{F}_b \subset \mathscr{F}_s$-mitallinen, niin

$$\mathbf{E}\,((H \cdot X)_t \,|\, \mathscr{F}_s) = \mathbf{E}\,((H \cdot X)_b \,|\, \mathscr{F}_s) = (H \cdot X)_b = (H \cdot X)_s$$

Kun $a \leq s < b$, niin $(H \cdot X)_t = C(X_{b\wedge t} - X_a)$. Koska $C, X_a \in \mathscr{F}_a \subset \mathscr{F}_s$, niin

$$\mathbf{E}\,((H \cdot X)_t \,|\, \mathscr{F}_s) = C\Big(\mathbf{E}\,(X_{b\wedge t} \,|\, \mathscr{F}_s) - X_a\Big) = C(X_s - X_a) = (H \cdot X)_s.$$

Toinen yhtäsuuruus seurasi prosessin X martingaaliominaisuudesta.

Tapauksessa $s < t \leq a$ ovat $(H \cdot X)_t = (H \cdot X)_s = 0$, joten martingaaliominaisuus on selviö. Jäljellä on enää tapaus $s < a < t$. Tällöin $(H \cdot X)_t = C(X_t - X_a)$ ja ehdollistamalla ajanhetkeen a päättelemme jo edellä käydyn tapauksen perusteella, että

$$\mathbf{E}\left((H\cdot X)_t \,|\, \mathscr{F}_a\right) = (H\cdot X)_a = 0$$

Koska $s < a$, niin

$$\mathbf{E}\left((H\cdot X)_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left((H\cdot X)_t \,|\, \mathscr{F}_a\right) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = 0 = (H\cdot X)_s.$$

Siispä kaikissa tapauksissa martingaaliominaisuus pätee, joten $(H\cdot X)$ on martingaali.

2. Täydennä Lemman 5.20. todistusta, eli osoita että

$$\langle\, (H\cdot X), (K\cdot Y)\,\rangle_t = \int_0^t H(s)K(s)\,\mathrm{d}\langle\, X, Y\,\rangle_s$$

kun X ja Y ovat rajoitettuja $(\mathscr{F}_t)$-martingaaleja ja prosessit $H(s) = C[\, s \in (a,b]\,] \in b\Pi_0$ ja $K(s) = D[\, s \in (c,d]\,] \in b\Pi_0$ ja $a < b \leq c < d$.
Ratkaisuehdotus: Olemme jo osoittaneet väitteen tapauksessa, että $a = b$ ja $c = d$. Kun $b \leq c$, niin $H(s)K(s) = 0$ jokaisella s. Siispä haluamme osoittaa, että

$$Z_t := (H\cdot X)_t(K\cdot Y)_t = CD(X_{b\wedge t} - X_{a\wedge t})(X_{d\wedge t} - X_{c\wedge t})$$

on martingaali, sillä tällöin kovarianssiprosessi on nollaprosessi. Adaptoituvuus ja integroituvuus ovat selviöitä, joten osoitamme vain martingaaliominaisuuden eli $\mathbf{E}\left(Z_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = Z_s$ kun $t \geq s$.

Jos $b \leq s < t$, niin $(H\cdot X)_t = (H\cdot X)_s$ on $\mathscr{F}_b \subset \mathscr{F}_s$-mitallinen. Siispä

$$\mathbf{E}\left(Z_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = (H\cdot X)_s \mathbf{E}\left((K\cdot Y)_t \,|\, \mathscr{F}_s\right)$$

Tähän voimmekin soveltaa Lemmaa 5.17 tai tehtävää 1, joten

$$(H\cdot X)_s \mathbf{E}\left((K\cdot Y)_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = (H\cdot X)_s(K\cdot Y)_s = Z_s.$$

Siispä martingaaliominaisuus on voimassa, kun $s \geq b$.

Kun $s < b$, niin $Z_s = (H\cdot X)_s D(X_s - X_s) = 0$. Siispä pitäisi osoittaa, että $\mathbf{E}\left(Z_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = 0$. Jos $t \leq b$, niin $Z_t = 0$, joten väite on selviö. Siispä jäljellä on tilanne $s < b < t$. Ehdollistamalla ajanhetkeen b palautamme tämän tilanteen tapaukseen $t \leq b$, sillä

$$\mathbf{E}\left(Z_t \,|\, \mathscr{F}_b\right) = (H\cdot X)_b \mathbf{E}\left(Z_t \,|\, \mathscr{F}_b\right) = Z_b = 0.$$

Siispä

$$\mathbf{E}\left(Z_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(Z_t \,|\, \mathscr{F}_b\right) \,|\, \mathscr{F}_s\right) = 0 = Z_s,$$

joten Z on martingaali, mikä olikin väite.

3. Näytä Lemma 5.22 eli näytä, että Lemmat 5.17 ja 5.20 yleistyvät yksinkertaisille ennustettaville prosesseille $H, K \in b\Pi_1$.

Ratkaisuehdotus: Lemman 5.17. yleistäminen on helppo. Kun $H \in b\Pi_1$, niin $H = H_1 + \cdots + H_n$ ja $H_j \in b\Pi_0$ sekä $H_j H_k [\, j \neq k\,] = 0$. Nyt $(H \cdot X) = (H_1 \cdot X) + \cdots + (H_n \cdot X)$ on martingaalien summanan martingaali.

Lemma 5.20 vaatii hieman enemmän, mutta ei valtavasti. Tarvitsemme tietoa, että $\langle\, X + Y, Z \,\rangle = \langle\, X, Z \,\rangle + \langle\, Y, Z \,\rangle$ sekä tietoa $\langle\, X, Y + Z \,\rangle = \langle\, X, Y \,\rangle + \langle\, X, Z \,\rangle$.

Näiden avulla saamme suoraan laskemalla

$$\langle\, H \cdot X, K \cdot Y \,\rangle = \sum_{j,k} \langle\, H_j \cdot X, K_k \cdot Y \,\rangle = \sum_{j,k} \int H_j(s) K_k(s) \,\mathrm{d}\langle\, X, Y \,\rangle$$

Koska

$$H(s)K(s) = \sum_{j,k} H_j(s) K_k(s)$$

niin

$$\langle\, H \cdot X, K \cdot Y \,\rangle = \int H(s)K(s) \,\mathrm{d}\langle\, X, Y \,\rangle.$$

Kovarinassiprosessin lineaarisuus kummankin puolensa suhteen näyttäminen suoraan määritelmän avulla on työlästä, mutta kovarianssiprosessin karakterisaation avulla varsin helppoa. Tiedämme, että $\langle\, X + Y, Z \,\rangle$ on se yksikäsitteinen ennustettava ja jatkuva lokaalisti rajoitetusti heilahteleva prosessi A, jolle $A_0 = 0$ ja $(X+Y)Z - A$ on lokaali martingaali. Koska $XZ - \langle\, X, Z \,\rangle$ ja $YZ - \langle\, Y, Z \,\rangle$ ovat myös lokaaleja martingaaleja, niin $(X+Y)Z - (\langle\, X, Z \,\rangle + \langle\, Y, Z \,\rangle) = (X+Y)Z - \widetilde{A}$ on lokaali martingaali. Prosessi $\widetilde{A}_0 = 0$, se on ennustettava ja jatkuva, sekä kahden lokaalisti rajoitetusti heilahtelevan prosessin summanan lokaalisti rajoitetusti heilahteleva. Siispä $\widetilde{A} = A$.

4. Näytä, että $\langle\, X, X \,\rangle_t = \langle\, X \,\rangle_t$.

Ratkaisuehdotus: Määritelmän nojalla $\langle\, X, X \,\rangle_t = \frac{1}{4}(\langle\, X + X \,\rangle_t - \langle\, X - X \,\rangle_t) = \frac{1}{4}\langle\, 2X \,\rangle_t$. Toisaalta tiedämme, että $\langle\, 2X \,\rangle$ on se yksikäsitteinen kasvava, jatkuva ja ennustettava prosessi, jolle $\langle\, 2X \,\rangle_0 = 0$ ja $(2X)_t^2 - \langle\, 2X \,\rangle_t$ on martingaali. Koska

$$(2X)_t^2 - 4\langle\, X \,\rangle_t = 4(X_t^2 - \langle\, X \,\rangle_t)$$

niin yksikäsitteisyyden nojalla $4\langle X \rangle_t = \langle 2X \rangle_t$. Siispä $\langle X, X \rangle_t = \frac{1}{4}\langle 2X \rangle_t = \langle X \rangle_t$.

5. Tiedämme, että $X_t = B_t^2 - t$ on martingaali. Olemme aiemmin nähneet myös, että

$$X_t = 2\int_0^t B_s \, \mathrm{d}B_s = \lim_{n\to\infty} (H_n \cdot B)_t$$

melkein varmasti, kun

$$H_n(s) = \sum_k B(k2^{-n})[\, s \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]\,].$$

Päättele Lemman 5.20 ja Lemman 5.22 (tai tehtävän 3) avulla, että

$$\langle X \rangle_t = 4\int_0^t B_s^2 \, \mathrm{d}s.$$

Ratkaisuehdotus: Lemman 5.20 ja Lemman 5.22 nojalla tiedämme, että

$$\langle H_n \cdot B \rangle_t = \int_0^t H_n(s)^2 \, \mathrm{d}\langle B \rangle_s$$

Tiedämme jo, että $B_t^2 - t$ on martingaali ja siten $\langle B \rangle_t = t$. Koska välit $I_k := (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ ovat keskenään pistevieraita (eli $I_k I_j = \emptyset$), niin

$$H_n(s)^2 = 4\sum_{j,k} B(j2^{-n})B(k2^{-n})[\, s \in I_j I_k \,] = 4\sum_k B^2(k2^{-n})[\, s \in I_k \,].$$

Kun $n \to \infty$, niin $H_n(s)^2$ suppenee Brownin liikkeen jatkuvuuden nojalla siten melkein varmasti kohti prosessia $B^2(s)$. Rajoitetun[1] suppenemisen lauseen avulla voimme päätellä, että

$$\lim_{n\to\infty} \langle H_n \cdot B \rangle_t = 4\int_0^t B(s)^2 \, \mathrm{d}s =: A_t$$

sillä

$$|H_n(s)|^2 \le \sup_{0 \le s \le t} B(s)^2 < \infty$$

melkein varmasti koska B on jatkuva ja väli $[0, t]$ on äärellinen.

Tiedämme siten, että

$$(H_n \cdot B)_t - \langle H_n \cdot B \rangle_t$$

[1]Kun mitta on äärellinen, niin rajoitettu funktio on integroituva, joten tämä on erikoistapaus dominoidun suppenemisen lauseesta

on martingaali jokaisella n. Voimme dominoidun suppenemisen lauseen perusteella päätellä, että

$$X_t - \lim_{n\to\infty} \langle H_n \cdot B \rangle_t = X_t - A_t$$

on martingaali. Tämä seuraa siitä, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X_t - A_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left((H_n \cdot B)_t - \langle H_n \cdot B \rangle_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big((H_n \cdot B)_s - \langle H_n \cdot B \rangle_s\Big) = X_s - A_s
\end{aligned}$$

Välittömästi näemme, että $A_0 = 0$, A_t on kasvava, jatkuva ja adaptoitu. Siispä $A_t = \langle X \rangle_t$ ja väite seuraa.