Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 4

1. Oletetaan, että X_n toteuttaa toisen kertaluvun differenssiyhtälön

$$\begin{cases} X_{k+2} - 2X_{k+1} + 2X_k = \xi_k, \quad k \geq 0, \\ X_0 = 0, X_1 = 0. \end{cases}$$

Näytä, ettei prosessi X_k ole Markovin prosessi, mutta 2-ulotteinen prosessi $Y_k = (X_{k+1}, X_k)$ on Markovin prosessi.

Ratkaisuehdotus: Nyt

$$\begin{aligned} X_2 &= \xi_0 \\ X_3 &= \xi_1 + 2\xi_0 \\ X_4 &= \xi_2 + 2\xi_1 + 2\xi_0 \\ X_5 &= \xi_3 + 2\xi_2 + 2\xi_1 \end{aligned}$$

Koska

$$\mathbf{P}\,(\, \xi_3 + 2 - 2 = 1 \,|\, \xi_2 = 1, \xi_1 = -1, \xi_0 = 1 \,) = \tfrac{1}{2}$$

niin

$$\mathbf{P}\,(\, X_5 = 1 \,|\, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1 \,) = \tfrac{1}{2}$$

Toisaalta $\mathbf{P}\,(\, X_5 = X_4 = 1 \,) = \mathbf{P}\,(\, \xi_2 = 1, \xi_0 = 1, \xi_1 = -1, \xi_3 = 1 \,) = 2^{-4}$ ja $\mathbf{P}\,(\, X_4 = 1 \,) = \mathbf{P}\,(\, \xi_2 = 1, \xi_0 = 1, \xi = -1 \,) + \mathbf{P}\,(\, \xi_2 = 1, \xi_0 = -1, \xi_1 = 1 \,) = 1/8 + 1/8 = 1/4$. Siispä

$$\mathbf{P}\,(\, X_5 = 1 \,|\, X_4 = 1 \,) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2} = \mathbf{P}\,(\, X_5 = 1 \,|\, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1 \,)$$

joten X ei ole Markovin prosessi. Kaksiulotteinen prosessi toteuttaa differenssiyhtälön

$$\begin{aligned} Y_{k+1} - Y_k &= \begin{pmatrix} X_{k+2} - X_{k+1} \\ X_{k+1} - X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_k + X_{k+1} - 2X_k \\ X_{k+1} - X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y_k + \begin{pmatrix} \xi_k \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=: AY_k + \Psi_k \end{aligned}$$

Tämä prosessi on Markovin prosessi, sillä $Y_0 = \bar{0}$, joten $Y_1 = f_1(\xi_0) = g_1(\Psi_0)$. Vastaavasti $Y_2 = f_2(\xi_0, \xi_1) = g_2(\Psi_0, \Psi_1)$ Tästä voimme induktiivisesti päätellä, että $Y_k = f_k(\xi_0, \dots, \xi_{k-1}) = g_k(\Psi_0, \dots, \Psi_{k-1})$ joten $(Y_0, \dots, Y_k) \perp\!\!\!\perp \Psi_k$ jokaisella k. Siispä

$$\mathbf{P}\,(\,Y_{k+1} = j \mid Y_k = i\,) = \mathbf{P}\,(\,(A+I)i + \Psi_k = j \mid Y_k = i\,) = \mathbf{P}\,(\,(A+I)i + \Psi_k = j\,)$$

ja vastaavasti

$$\mathbf{P}\,(\,Y_{k+1} = j \mid Y_k = i, \forall l < k \colon Y_l = i_l\,) = \mathbf{P}\,(\,(A+I)i + \Psi_k = j\,)$$

Siispä Y on Markovin prosessi.

2. Olkoon $\mathscr{N}$ nollatapahtumat ja $\mathscr{G}$ jokin ali-σ-algebra. Näytä, että

i) algebra $\mathscr{A}$, jonka $\mathscr{N}$ ja $\mathscr{G}$ virittää, koostuu pelkästään joukoista, jotka ovat muotoa $A \cup N \setminus M =: (A \cup N) \cap M^C$, missä $A \in \mathscr{G}$ ja $N, M \in \mathscr{N}$.

ii) $\mathscr{A}$ on myös Dynkinin systeemi (eli $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{N}, \mathscr{G})$).

Ratkaisuehdotus: Kohdassa *i*) haluamme näyttää, että

$$\mathscr{A} = \mathscr{C} := \{\ A \cup N \setminus M :\ A \in \mathscr{G}, N, M \in \mathscr{N}\ \}$$

Koska $A, N, M \in \mathscr{N} \cup \mathscr{G}$, niin $A \cup N \cap M^C \in \mathscr{A}$. Siispä $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$.

Jos $\mathscr{C}$ on algebra, niin $\mathscr{C} \supset \mathscr{N} \cup \mathscr{M}$, joten $\mathscr{C} \supset \mathscr{A}$. Riittää osoittaa, että jos $E, F \in \mathscr{C}$, niin $E^C \in \mathscr{C}$ ja $E \cup F \in \mathscr{C}$.

Ensimmäiseksi näytämme komplementoinnin. Jos $E = A \cup N \setminus M$, niin $E^C = (A^C \cap N^C) \cup M = (A^C \cup M) \cap (N^C \cup M)$. Koska $(N^C \cup M)^C = N \cap M^C \subset N$, niin $N^C \cup M = \widetilde{N}^C$, missä $\widetilde{N} \in \mathscr{N}$. Siispä $A^C \in \mathscr{C}$.

Olkoon nyt $E_j = A_j \cup N_j \setminus M_j$. Tällöin osittelulain nojalla

$$\begin{aligned} E_1 \cup E_2 &= \big((A_1 \cup N_1) \cap M_1^C\big) \cup \big((A_2 \cup N_2) \cap M_2^C\big) \\ &= \Big((A_1 \cup N_1) \cup \big((A_2 \cup N_2) \cap M_2^C\big)\Big) \cap \Big(M_1^C \cup \big((A_2 \cup N_2) \cap M_2\big)\Big) \end{aligned}$$

Jälkimmäinen termi on muotoa $\widetilde{M}^C$, missä $\widetilde{M} \in \mathscr{N}$. Ensimmäiseen osaan käytämme osittelulakia vielä kerran, joten

$$E_1 \cup E_2 = \big((A_1 \cup A_2 \cup N_1 \cup N_2) \cap (A_1 \cup N_1 \cup M_2^C)\big) \cap \widetilde{M}^C$$

Nyt ensimmäinen termi oikealla on muotoa $A_1 \cup A_2 \cup N_3 \setminus M_3$, joten

$$E_1 \cup E_2 = (A_1 \cup A_2 \cup N_3) \cap (M_3 \cup \widetilde{M})^C \in \mathscr{C}$$

Kohta ii):ssä haluamme näyttää, että $\mathscr{A}$ on myös Dynkinin systeemi. Koska $\mathscr{A}$ on algebra, niin tiittää siis osoittaa monotonisen suppenemisen ominaisuus. Olkoon siis $(E_n) \subset \mathscr{A}$ monotoninen jono ja $E = \lim E_n$. Tällöin $E_n = A_n \cup N_n \setminus M_n$.

Nyt jonon (E_n) monotonisuuden perusteella

$$E_n = \bigcup_{k \leq n} E_k = \bigcup_{k \leq n} A_k \cup N_k \setminus M_k$$

Tästä voimme päätellä, että

$$E_n \subset \bigcup_{k \leq n} A_k \cup N_k =: \bigcup_{k \leq n} A_k \cup N_n' =: A_n^* \cup N_n'$$

missä $N_n' \in \mathscr{N}$ nollatapahtumien yhdistelmänä. Vastaavasti

$$E_n \supset \bigcup_{k \leq n} A_k \setminus M_k = A_n^* \setminus M_n'$$

missä $M_n' \in \mathscr{N}$ nollatapahtumien yhdistelmänä. Nyt olemme hyvillä vesillä, sillä (A_n^*) on kasvava jono σ-algebran $\mathscr{G}$ alkioita. Siispä $\lim A_n^* =: A \in \mathscr{G}$. Voimme siten päätellä, että

$$E \subset A \cup \bigcup_k N_k' = A \cup N^*$$

missä $N^* \in \mathscr{N}$ nollatapahtumien numeroituvana yhdisteenä. Vastaavasti

$$E \supset A \setminus M^* \Longrightarrow E^C \subset A^C \cup M^*$$

missä $M^* \in \mathscr{N}$. Koska $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$ ja edellisen perusteella $E \setminus A \subset N^*$, joten $E = (E \cap A) \cup N$, missä $N \in \mathscr{N}$. Edelleen $E \cap A = A \setminus (A \setminus E)$ ja edellisen perusteella $A \setminus E \subset M^* \cap A \in \mathscr{N}$. Siispä $E = (A \setminus N) \cup M \in \mathscr{A}$, joten $\mathscr{A}$ on myös Dynkinin systeemi.

3. Olkoon $\tau_1 \leq \tau_2$ pysähdyshetkiä filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen. Näytä, että $\mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$.
Ratkaisuehdotus: On siis näytettävä, että jos $A \in \mathscr{F}_{\tau_1}$, niin $A \in \mathscr{F}_{\tau_2}$. Oletetaan, että $A \in \mathscr{F}_{\tau_1}$. Nyt $A \in \mathscr{F}_{\tau_2}$ jos $\{A, \tau_2 \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ jokaisella t. Koska $\tau_1 \leq \tau_2$ oletuksen nojalla, niin $\{A, \tau_2 \leq t\} = \{A, \tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\}$. Nyt $\{A, \tau_1 \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, sillä

$A \in \mathscr{F}_{\tau_1}$. Edelleen $\{\tau_2 \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, sillä τ_2 on pysähdyshetki. Siispä $\{A, \tau_2 \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ ja väite seuraa.

4. Näytä luentojen Lemma 4.7, eli kun H on ennustettava, rajoitettu ja positiivinen, niin $(H \cdot X)_n$ on alimartingaali tai ylimartingaali, jos X_n on alimartingaali tai ylimartingaali.

Ratkaisuehdotus: Riittää osoittaa, että $(H \cdot X)_n$ on alimartingaali, kun X on alimartingaali, sillä $(H \cdot (-X))_n = -(H \cdot X)_n$ ja X on ylimartingaali jos ja vain jos $-X$ on alimartingaali. Oletamme siis, että X on alimartingaali. Koska määritelmän nojalla

$$(H \cdot X)_n = H_1(X_1 - X_0) + \cdots + H_n(X_n - X_{n-1})$$

niin $(H \cdot X)$ on adaptoitu ja integroituva, sillä

$$\mathbf{E}\,|(H \cdot X)_n| \leq M\big((\mathbf{E}\,|X_1| + \mathbf{E}\,|X_0|\,) + \ldots (\mathbf{E}\,|X_n| + \mathbf{E}\,|X_{n-1}|\,)\big) < \infty$$

missä $\sup_n |H_n| \leq M$. Jäljelle jää osoittaa alimartingaaliominaisuus, eli epäyhtälö

$$\mathbf{E}\,\left((H \cdot X)_m \,|\, \mathscr{F}_n\right) \geq (H \cdot X)_n$$

jokaisella $m > n$. Prosessin $(H \cdot X)$ määritelmän nojalla tämä on yhtäpitävää väitteen

$$\sum_{k=n+1}^{m} \mathbf{E}\,\left(H_k(X_k - X_{k-1}) \,|\, \mathscr{F}_n\right) \geq 0$$

kanssa. Koska H on ennustettava, niin

$$\mathbf{E}\,\left(H_k(X_k - X_{k-1}) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) = H_k \mathbf{E}\,\left(X_k - X_{k-1} \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right)$$

Koska (X_n) on alimartingaali, niin

$$\mathbf{E}\,\left(X_k - X_{k-1} \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) = \mathbf{E}\,\left(X_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) - X_{k-1} \geq 0.$$

Koska $H_k \geq 0$, niin tulon merkki ei muutu, joten

$$\mathbf{E}\,\left(H_k(X_k - X_{k-1}) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right) \geq 0$$

Kun $k - 1 \geq n$ eli kun $k \geq n + 1$, niin ehdollisen odotusarvon torniominaisuuden nojalla

$$\mathbf{E}\,\left(H_k(X_k - X_{k-1}) \,|\, \mathscr{F}_n\right) = \mathbf{E}\,\left(\,\mathbf{E}\,\left(H_k(X_k - X_{k-1}) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\right)\, |\, \mathscr{F}_n\right) \geq 0.$$

Tämä osoittaakin väitteen.

5. Näytä, että jos $N(\omega) \leq M(\omega) < K < \infty$ ovat $(\mathscr{F}_n)$-pysähdyshetkiä ja $A \in \mathscr{F}_N$, niin $N^A := N[\,A\,] + K[\,A^C\,]$ ja $M^A := M[\,A\,] + K[\,A^C\,]$ ovat rajoitettuja $(\mathscr{F}_n)$-pysähdyshetkiä, ja

$$X(N^A) = X(N)[\,A\,] + X(K)[\,A^C\,]$$

Ratkaisuehdotus: Osoitetaan aluksi, että N^A on pysähdyshetki. Määritelmän nojalla $\{N^A \leq n\}$ on joko tyhjä joukko (kun $n < N < K$), varma tapahtuma (kun $n \geq K$) tai sitten $\{N \leq n\} \cap A$. Eli voimme kirjoittaa, että

$$[\,N^A \leq n\,] = [\,N \leq n < K, A\,] + [\,n \geq K\,] = [\,A, N \leq n][n < K\,] + [\,n \geq K\,]$$

Mutta nämä ovat pysähdyshetken σ-algebran määritelmän nojalla $\mathscr{F}_n$-mitallisia, joten jokaisella n tapahtuma $\{N^A \leq n\} \in \mathscr{F}_n$. Siispä N^A on pysähdyshetki.

Osoitetaan nyt, että M^A on pysähdyshetki. Kuten edellä, ainoa epätriviaali tilanne on, kun $M \leq n < K$. Tällöin $\{M^A \leq n\} = \{M \leq n\} \cap A$. Siis kaiken kaikkiaan,

$$[\,M^A \leq n\,] = [\,M \leq n, A][n < K\,] + [\,n \geq K\,]$$

Nyt $A \in \mathscr{F}_N \subset \mathscr{F}_M$ tehtävän 3. perusteella, joten $\{M \leq n, A\} \in \mathscr{F}_n$. Siispä myös M^A on pysähdyshetki.

Viimeinen väite on helppo, sillä

$$X(N^A) = [\,A\,]X(N^A) + [\,A^C\,]X(N^A) = [\,A\,]X(N) + [\,A^C\,]X(K)$$