Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 4

1. Olkoon (τ_n) jono pysähdyshetkiä filtraation $(\mathscr{F}_t)$ suhteen. Näytä, että

i) $\tau_1 \wedge \tau_2$ on pysähdyshetki

ii) $\tau_1 \vee \tau_2$ on pysähdyshetki

iii) $\sup \tau_n$ on pysähdyshetki

Ratkaisuehdotus: Kohta *i)* on varsin helppo. Koska $\{\tau_1 \wedge \tau_2 > t\} = \{\tau_1 > t\} \cap \{\tau_2 > t\} \in \mathscr{F}_t$, niin $\tau_1 \wedge \tau_2$ on pysähdyshetki.

Kohta *ii)* ei ole juuri hankalmpi. Tämä havaitaan suoraan, sillä $\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.

Kohta *iii)* seuraa lähes suoraan kohdan *ii)* päätelmällä. Nyt

$$\{\sup \tau_n \leq t\} = \bigcap \{\tau_n \leq t\}$$

sillä jos $\sup \tau_n \leq t$, niin t on joukon $\{\ \tau_n :\ n \in \mathbb{N}\ \}$ yläraja. Siispä $\tau_n \leq t$ jokaisella n. Toisaalta, jos $\tau_n \leq t$ jokaisella n, niin t on joukon $\{\ \tau_n :\ n \in \mathbb{N}\ \}$ yläraja. Koska $\sup \tau_n$ on pienin yläraja, niin $\sup \tau_n \leq t$. Siispä

$$\{\sup \tau_n \leq t\} = \bigcap \{\tau_n \leq t\} \in \mathscr{F}_t,$$

joten väite seuraa.

2. Näytä, että jos $(\mathscr{F}_t)$ on filtraatio, niin $(\mathscr{F}_t^+)$ on oikealta jatkuva filtraatio, kun

$$\mathscr{F}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s.$$

Ratkaisuehdotus: Osoitamme ensin, että $(\mathscr{F}_t^+)$ on filtraatio. Olkoon siis $s > t$. Tästä seuraa, että

$$\mathscr{F}_t^+ \subset \mathscr{F}_s.$$

Koska $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_u$ jokaisella $u > s$, niin

$$\mathscr{F}_t^+ \subset \mathscr{F}_s \subset \bigcap_{u>s} \mathscr{F}_u = \mathscr{F}_s^+.$$

Siispä $(\mathscr{F}_t^+)$ on filtraatio. Oikealta jatkuvuuden osoittaminen ei ole myöskään hankalaa, sillä

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^+ = \bigcap_{s>t} \bigcap_{u>s} \mathscr{F}_u$$

Jos siis $A \in \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^+$, niin $A \in \mathscr{F}_u$ jokaisella $u > s > t$. Siispä $A \in \mathscr{F}_u$ jokaisella $u > t$, joten $A \in \mathscr{F}_t^+$. Siis

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^+ \subset \mathscr{F}_t^+.$$

Toisaalta tiedämme, että $(\mathscr{F}_s^+)$ on filtraatio, joten $\mathscr{F}_t^+ \subset \mathscr{F}_s^+$ jokaisella $s > t$. Siispä

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^+ \supset \mathscr{F}_t^+.$$

mikä osoittaa, että $(\mathscr{F}_t^+)$ on oikealta jatkuva.

3. Olkoon aikajoukko $T = \mathbb{N}$ ja (X_n) jokin satunnaiskulku. Jos τ on pysähdyshetki X:n historian $(\mathscr{H}_n)$ suhteen, niin voimme määritellä

$$\mathscr{H}_\tau := \sigma\{ \ \{\tau = n, X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} : \ n \in \mathbb{N}, i_0, \dots, i_n \in S \ \} =: \sigma(\mathscr{C})$$

Näytä, että tapahtuma $A \in \mathscr{H}_\tau$ jos ja vain jos $\{A \text{ ja } \tau \le n\} \in \mathscr{H}_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.
Ratkaisuehdotus: *Oletetaan aluksi*, että $A \in \mathscr{H}_\tau$. Tällöin

$$A = \bigcup_n \bigcup_k \{\tau = n, X_0 = i_{0,k,n}, \dots, X_n = i_{n,k,n}\}$$

jollakin tiloilla $\{ \ i_{j,k,n} \in S : \ k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, j = 0, \dots, n \ \}$. Pidämme tätä aluksi selviönä, mutta palaamme tehtävän lopulla tähän väitteeseen tarkemmin. Tästä seuraa, että tapahtuma

$$\{A \text{ ja } \tau = n\} = \bigcup_k \{\tau = n, X_0 = i_{0,k,n}, \dots, X_n = i_{n,k,n}\}$$

missä pysähdyshetken määritelmän nojalla $\{\tau = n\} \in \mathscr{H}_n$. Koska myös tapahtuma $\{X_j = i_{j,k,n}\} \in \mathscr{H}_j \subset \mathscr{H}_n$, niin

$$\{A \text{ ja } \tau = n\} \in \mathscr{H}_n$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Siispä

$$\{A \text{ ja } \tau \le n\} = \bigcup_{m=0}^{n} \{A \text{ ja } \tau = n\} \in \mathscr{H}_n.$$

Oletetaan seuraavaksi, että $\{A \text{ ja } \tau \le n\} \in \mathscr{H}_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan väitettä aluksi, kun $n = 0$. Nyt $[\,A, \tau = 0\,] = [\,A, \tau \le 0\,]$ on oletuksen nojalla $\mathscr{H}_0$-mitallinen, joten

$$[\,A, \tau = 0\,] = f_0(X_0)$$

jollakin $f_0 \colon S \to \{0, 1\}$, missä maalijoukko on kahden pisteen joukko. Tämä puolestaan tarkoittaa, että

$$f_0(i) = [\,i = i_{0,k,0} \text{ jollakin } k \in \mathbb{N}\,]$$

Koska $[\,A, \tau = 0\,] = [\,A, \tau = 0\,] \times [\,\tau = 0\,]$, niin

$$[\,A, \tau = 0\,] = \sum_k [\,X_0 = i_{0,k,n}, \tau = 0\,] = [\,\bigcup_k \{X_0 = i_{0,k,n}, \tau = 0\}\,],$$

joten ainakin $[\,A, \tau = 0\,] \in \mathscr{H}_\tau$. Yleinen tapaus ei ole vaikeampi, sillä $[\,A, \tau = n\,] = [\,A, \tau \le n\,] - [\,A, \tau \le n-1\,] \in \mathscr{H}_n$. Voimme käyttää samaa päätelmää, jonka nojalla

$$[\,A, \tau = n\,] = f_n(X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

missä $f_n \colon S^{n+1} \to \{0, 1\}$. Vastaavasti voimme todeta, että välttämättä

$$f_0(i_0, \ldots, i_n) = [\,\forall j \le n \colon i_j = i_{j,k,n} \text{ jollakin } k \in \mathbb{N}\,]$$

Vastaavasti päättelemme, että $[\,A, \tau = n\,] = [\,A, \tau = n\,] \times [\,\tau = n\,]$, joten

$$[\,A, \tau = n\,] = \sum_k [\,\tau = n, X_{0,k,n} = i_{0,k,n}, \ldots, X_{n,k,n} = i_{n,k,n}\,]$$

joten päättelemme, että $\{A, \tau = n\} \in \mathscr{H}_\tau$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Siispä $A = \bigcup \{A, \tau = n\} \in \mathscr{H}_\tau$.

Ei sisälly tehtävänä todistukseen, mutta on hieman yleistä teoriaa: Palaamme nyt väitteeseen, jonka mukaan

$$\mathscr{H}_\tau = \{\, \bigcup_{n,k} \{\tau = n, X_j = i_{j,k,n} \text{ jokaisella } j \le n\} : \; i_{j,k,n} \in S \text{ kun } n, k \in N \text{ ja } j \le n \,\}$$

Väitteen mukaan siis jokainen σ-algebran $\mathscr{H}_\tau$ on esitettävissä numeroituvana yhdisteenä polkutapahtumista. Tämän osoittamiseksi on huomattava, että tällaiset polkutapahtuma ovat σ-algebran $\mathscr{H}_\tau$ *atomeja*. Atomisuus tarkoittaa, että $BC = \emptyset$, jos

$B \neq C$. Tässä tilanteessa atomit myös *täyttävät* koko todennäköisyysavaruuden Ω, sillä

$$\Omega = \bigcup \{ \ \tau = n, X_0 = i_{0,k,n}, \dots, X_n = i_{n,k,n} : \ i_{j,k,n} \in S, n, k \in \mathbb{N}, \text{ ja } j \leq n \ \}$$

Onkin yleisesti voimassa, että jos $\mathscr{E} := \{ \ B_n : \ n \in \mathbb{N} \ \}$ on joukko *erillisiä* tapahtumia, jotka täyttävät koko avaruuden, niin niiden virittämä σ-algebra $\sigma(\mathscr{E})$ koostuu joukoista, jotka ovat muotoa

$$E = \bigcup \{ \ B_j : \ j \in C_E \subset \mathbb{N} \ \}.$$

Sanomme näiden joukkojen muodostamaa joukkoa $\mathscr{A}$:ksi seuraavassa. Selvästi $\Omega \in \mathscr{A}$, sillä oletimme että atomit täyttävät koko todennäköisyysavaruuden. Myöskin $\mathscr{A}$ on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen suoraan määritelmänsä perusteella. Jos se on siten suljettu komplementoinnin suhteen, on se σ-algebrajoka sisältää joukon $\mathscr{C}$, joten $\mathscr{A} \supset \pi(\mathscr{E})$. Toisaalta, koska jokainen joukko $E \in \pi(\mathscr{E})$ määritelmän mukaan, on siten $\mathscr{A} = \pi(\mathscr{E})$. Tämä siis tapauksessa, että $\mathscr{A}$ on suljettu komplementoinnin suhteen.

Tähän tarvitsemme atomisuutta, sillä jos

$$A = \bigcup \{ \ B_j : \ j \in C_A \subset \mathbb{N} \ \}$$

niin

$$A^C = \bigcup \{ \ B_j : \ j \notin C_A \ \} \in \mathscr{A}$$

Tämä seuraa siitä, että jos $\omega \notin A$, niin $\omega \notin B_j$ jokaisella $j \in C_A$. Toisaalta täyttävyyden nojalla $\omega \in B_k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, joten $\omega \in B_k$ jollakin $\mathbb{N} \setminus C_A$. Toisaalta, jos $\omega \in B_k$ jollakin $\mathbb{N} \setminus C_A$, niin jos $j \in C_A$, tiedämme, että $B_j \cap B_k = \emptyset$, joten $\omega \notin B_j$. Siispä $\omega \notin B_j$ jokaisella $j \in C_A$ eli $\omega \in A^C$.

4. Osoita seuraavat kaksi kohtaa.

i) Näytä, että

$$\pi(\mathscr{C}) := \bigcap \{ \ \mathscr{G} : \ \mathscr{C} \subset \mathscr{G}, \text{ ja } \mathscr{G} \text{ on } \pi\text{-systeemi} \ \}$$

on π-systeemi, jota nimitetään $\mathscr{C}$:n virittämäksi π-systeemiksi.

ii) Näytä, että jos (X_t) on reaaliarvoinen stokastinen prosessi, niin

$$\begin{aligned} &\pi\{ \ \{X_t \leq x\} : \ t \in T, x \in \mathbb{R} \ \} \\ &\qquad = \{ \ \{X_{t_1} \leq x_{t_1}, \dots X_{t_n} \leq x_{t_n}\} : \ n \in \mathbb{N}_+, t_1, \dots, t_n \in T \ \} \end{aligned}$$

Ratkaisuehdotus: Kohta i). Jos $A, B \in \pi(\mathscr{C})$, niin $A, B \in \mathscr{G}$ jokaisella π-systeemillä, jotka sisältävät joukon $\mathscr{C}$. Tästä seuraa, että $A \cap B \in \mathscr{G}$ jokaisella $\mathscr{G}$, mutta tämä tarkoittaa, että $A \cap B \in \pi(\mathscr{C})$.
Kohta ii). Merkitään väitteen oikealla puolella olevaa joukkoperhettä $\mathscr{A}$:lla. Jos $\mathscr{G}$ on π-systeemi, joka sisältää joukot $\{X_t \leq x\}$ aina, kun $t \in T$ ja $x \in \mathbb{R}$, niin $\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2\}$ aina, kun $t_1, t_2 \in T$ ja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Induktiolla näemme, että joukot $\{X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\}$ aina, kun $n \geq 1$ ja $t_1, \ldots, t_n \in T$ ja $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Siispä

$$\mathscr{G} \supset \mathscr{A}$$

jokaisella $\mathscr{G} \supset \{\, \{X_t \leq x\} : \ t \in T, x \in \mathbb{R} \,\} =: \mathscr{C}$. Siispä

$$\pi(\mathscr{C}) \supset \mathscr{A}.$$

Koska $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, niin jos nyt osoitamme, että $\mathscr{A}$ on π-systeemi, niin $\pi(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$ määritelmän mukaan. Nyt jos $A, B \in \mathscr{A}$, niin

$$A = \{X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\}$$

ja

$$B = \{X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1}, \ldots, X_{t_{n+m}} \leq x_{n+m}\},$$

joten

$$A \cap B = \{X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_{n+m}} \leq x_{n+m}\} \in \mathscr{A}$$

Siispä $\mathscr{A}$ on π-systeemi ja siten $\mathscr{A} = \pi(\mathscr{C})$.

5. Olkoon X MP historiansa $(\mathscr{H}_t)$ suhteen. Jos määrittelemme tulevaisuuden $\mathscr{T}_t := \sigma\{\, X_s : \ s \geq t \,\}$, niin voimme yleistää Markovin ominaisuuden muotoon

$$\mathbf{E}\ (Z \,|\, \mathscr{H}_t) = \mathbf{E}\ (Z \,|\, X_t)$$

aina, kun Z on rajoitettu satunnaismuuttuja, joka on $\mathscr{T}_t$-mitallinen. Näytä tästä seuraavat erikoistapaukset.

i) $Z = f(X_s)$, kun $s \geq t$ ja f on rajoitettu ja mitallinen kuvaus.

ii) $Z = [\, A_n \,]$, kun tapahtuma

$$A_n = \{X_{s_1} \leq x_1, \ldots, X_{s_n} \leq x_n\} \in \mathscr{T}_t$$

ja $t < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ (ainakin tapauksessa $n = 2$.)

Voit halutessasi myös miettiä, kuinka yleinen tapaus seuraa näistä.

Ratkaisuehdotus: Kohta i). Tämä tehtävä oikein janoaa funktion approksimointia yksinkertaisemmilla funktiolla. Jos $f(x) = [\, x \in A \,]$, niin väite on tällöin

$$\mathbf{E}\,(f(X_s) \,|\, \mathscr{H}_t) = \mathbf{P}\,(\, X_s \in A \,|\, \mathscr{H}_t \,) = \mathbf{P}\,(\, X_s \in A \,|\, X_t \,) = \mathbf{E}\,(f(X_s) \,|\, X_t)$$

suoraan määritelmän nojalla. Jos taas

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k[\, A_k \,](x) =: \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x),$$

niin ehdollisen odotusarvon lineaarisuuden nojalla

$$\mathbf{E}\,(f(X_s) \,|\, \mathscr{H}_t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{E}\,(f_k(X_s) \,|\, \mathscr{H}_t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{E}\,(f_k(X_s) \,|\, X_t) = \mathbf{E}\,(f(X_s) \,|\, X_t)$$

Jos nyt f on mitallinen, posiitivinen ja rajoitettu kuvaus, niin löydämme kasvavan jonon yksinkertaisia funktioita (f_n), joille $0 \leq f_n \uparrow f$. Siispä monotonisen suppenemisen lauseen nojalla

$$\mathbf{E}\,(f(X_s) \,|\, \mathscr{H}_t) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,(f_n(X_s) \,|\, \mathscr{H}_t) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,(f_n(X_s) \,|\, X_t) = \mathbf{E}\,(f(X_s) \,|\, X_t)$$

Jos f on mitallinen ja rajoitettu, niin $f + N$ on positiivinen jollakin suurella $N \in \mathbb{N}$, joten tämäkin seuraa edellisistä kohdista lineaarisuuden nojalla.

Kohta ii) Osoitamme väitteen tapauksessa $n = 2$, sillä muut on suoraaviivaisia induktiivisia lisiä tähän. Lähdemme laskemaan. Merkittän $s_1 =: s$ ja $s_2 =: u$ sekä $x_1 =: x$ ja $x_2 =: y$. Siispä haluamme näyttää, että

$$\mathbf{P}\,(\, X_s \leq x, X_u \leq y \,|\, \mathscr{H}_t \,) = \mathbf{P}\,(\, X_s \leq x, X_u \leq y \,|\, X_t \,)\,.$$

missä $t < s < u$. Ehdollistamme lisäksi ajanhetken s suhteen, joten

$$\mathbf{P}\,(\, X_s \leq x, X_u \leq y \,|\, \mathscr{H}_t \,) = \mathbf{E}\,([\, X_s \leq x \,]\mathbf{P}\,(\, X_u \leq y \,|\, \mathscr{H}_s \,) \,|\, \mathscr{H}_t)\,,$$

sillä voimme aina ehdollistaa suuremman σ-algebran suhteen. Nyt oikealla puolella oleva termi $\mathbf{P}\,(\, X_u \leq y \,|\, \mathscr{H}_s \,) = \mathbf{P}\,(\, X_u \leq y \,|\, X_s \,)$ Markovin ominaisuuden nojalla. Ehdollisen odotusarvon ominaisuuksien nojalla tiedämme[1] että $\mathbf{P}\,(\, X_u \leq y \,|\, X_s \,) = f(X_s)$ jollakin rajoitetulla ja mitallisella funktiolla f. Siispä

$$\mathbf{P}\,(\, X_s \leq x, X_u \leq y \,|\, \mathscr{H}_t \,) = \mathbf{E}\,([\, X_s \leq x \,]f(X_s) \,|\, \mathscr{H}_t) = \mathbf{E}\,(g(X_s) \,|\, \mathscr{H}_t)\,,$$

[1] tai jos et tiennyt, niin seuraava on hyvä tuntea: löydämme aina jonkin mitallisen funktion g, jolle $Y = \mathbf{E}\,(Z \,|\, X) = g(X)$. Tämä seuraa (yllätys yllätys) approksimoimalla satunnaismuuttujaa Y yksinkertaisilla satunnaismuuttujilla Y_n ja näyttämällä, että näille löytyy mitalliset funktiot g_n, joilla $Y_n = g_n(X)$. Loppu on sitten osoittaa, että $g_n \to g$, ja että $g(X) = Y$

missä $g(t) = f(t)[\, t \le x \,]$ on mitallinen ja rajoitettu. Voimme siten soveltaa kohtaa $i)$, ja havaitsemme, että

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\, X_s \le x, X_u \le y \,|\, \mathscr{H}_t \,) &= \mathbf{E}\,(g(X_s) \,|\, X_t) \, = \mathbf{E}\,([\, X_s \le x \,] f(X_s) \,|\, X_t) \\ &= \mathbf{E}\,([\, X_s \le x \,] \mathbf{P}\,(\, X_u \le y \,|\, X_s \,) \,|\, X_t)\end{aligned}$$

Tätä pitää vielä hieman muokata, jotta väite seuraa, mutta olemme selvästi jo lähempänä. Käytämme nyt Markovin ominaisuutta uudestaan termiin $\mathbf{P}\,(\, X_u \le y \,|\, X_s \,) = \mathbf{P}\,(\, X_u \le y \,|\, \mathscr{H}_s \,)$. Koska $[\, X_s \le x \,]$ on $\mathscr{H}_s$-mitallinen, niin

$$[\, X_s \le x \,] \mathbf{P}\,(\, X_u \le y \,|\, X_s \,) = \mathbf{P}\,(\, X_s \le x, X_u \le y \,|\, \mathscr{H}_s \,)$$

Nyt koska $\sigma(X_t) \subset \mathscr{H}_t \subset \mathscr{H}_s$, niin

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,([\, X_s \le x \,] \mathbf{P}\,(\, X_u \le y \,|\, X_s \,) \,|\, X_t) \, &= \mathbf{E}\,(\mathbf{P}\,(\, X_s \le x, X_u \le y \,|\, \mathscr{H}_s \,) \,|\, X_t) \\ &= \mathbf{P}\,(\, X_s \le x, X_u \le y \,|\, X_t \,)\end{aligned}$$

Kun tämä on osoitettu, voimme osoittaa kuten kohdassa $i)$, että

$$\mathbf{E}\,(f(X_s, X_u) \,|\, \mathscr{H}_t) \, = \mathbf{E}\,(f(X_s, X_u) \,|\, X_t)$$

jokaisella rajoitetulla ja mitallisella $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Induktio-oletukseksi ottaisimmekin siten, että

$$\mathbf{E}\,(f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \,|\, \mathscr{H}_t) \, = \mathbf{E}\,(f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \,|\, X_t)$$

ja induktioväitteen osoittamiseksi riittää näyttää, että

$$\mathbf{E}\,(f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})[\, X_u \le x \,] \,|\, \mathscr{H}_t) \, = \mathbf{E}\,(f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})[\, X_u \le x \,] \,|\, X_t)$$

missä $t < s_1 < \dots < s_n < u$. Kuten tapauksessa $n = 2$, voimme ehdollistaa ajanhetken s_n historian yli, joten vasen puoli on

$$\mathbf{E}\,(f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \mathbf{P}\,(\, X_u \le x \,|\, \mathscr{H}_{s_n} \,) \,|\, \mathscr{H}_t) \, = \mathbf{E}\,(g(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \,|\, \mathscr{H}_t)$$

jollakin mitallisella ja rajoitetulla funktiolla g. Voimme siten käyttää induktio-oletusta ja

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,(g(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \,|\, \mathscr{H}_t) \, &= \mathbf{E}\,(f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \mathbf{P}\,(\, X_u \le x \,|\, \mathscr{H}_{s_n} \,) \,|\, X_t) \\ &= \mathbf{E}\,(f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})[\, X_u \le x \,] \,|\, X_t)\end{aligned}$$

Yleinen tapaus $\mathbf{E}\,(Z \,|\, \mathscr{H}_t) = \mathbf{E}\,(Z \,|\, X_t)$ ei ole enää kaukana. Kohdan *ii*) osoittaminen näytti, että väite on voimassa tapahtumien

$$\mathscr{C} := \{\, X_s \leq x : \; s \geq t, x \in \mathbb{R} \,\}$$

virittämän π-systeemin

$$\pi(\mathscr{C}) := \{\, A_n : \; A_n \text{ on samaa muotoa kuin kohdassa } ii) \,\}$$

Näytämme kuinka tämä joukko laajenee ns. *monotonisen luokan lauseen* nojalla käsittämään kaikki $\mathscr{T}_t$-mitalliset rajoitetut satunnaismuuttujat. *Asetamme joukon*

$$\mathscr{Z} := \{\, Z : \; Z \text{ on } \mathscr{T}_t\text{-mitallinen ja rajoitettu, jolle väite on voimassa} \,\}$$

joka siis on vain kaikkien niiden satunnaismuuttujien joukko, joille haluamamme väite pitää paikkaansa. Haluaisimme osoittaa, että se sisältää kaikki rajoitetut ja $\mathscr{T}_t$-mitalliset satunnaismuuttujat. Tiedämme ainakin, että jos $A \in \pi(\mathscr{C})$, niin $[\,A\,] \in \mathscr{Z}$. Edelleen tiedämme, jos $Z_1, Z_2 \in \mathscr{Z}$, niin ehdollisen odotusarvon lineaarisuuden perusteella myös lineaarinen yhdiste $Z_1 + \alpha Z_2 \in \mathscr{Z}$. Edelleen, jos $0 \leq (Z_n) \subset \mathscr{Z}$ on kasvava mutta rajoitettu jono satunnaismuuttujia ja $Z_n \uparrow Z$, missä Z on rajoitettu, niin monotonisen suppenemisen lauseen nojalla

$$\mathbf{E}\,(Z \,|\, \mathscr{H}_t) = \lim_n \mathbf{E}\,(Z_n \,|\, \mathscr{H}_t) = \lim_n \mathbf{E}\,(Z_n \,|\, X_t) = \mathbf{E}\,(Z \,|\, X_t)$$

joten myös $Z \in \mathscr{Z}$. Jos voimme osoittaa, että $[\,A\,] \in \mathscr{Z}$ jokaisella $A \in \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{T}_t$, niin väite seuraa perinteistä reittiä. Määrittelemmekin joukon

$$\mathscr{D} := \{\, A \in \mathscr{T}_t : \; [\,A\,] \in \mathscr{Z} \,\} \supset \pi(\mathscr{C}).$$

Jos näytämme, että $\mathscr{D}$ on Dynkinin systeemi, niin tällöin Dynkinin $\pi - \lambda$-lause sanoo, että

$$\mathscr{D} \supset \lambda(\pi(\mathscr{C})) = \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{T}_t$$

Koska toisaalta $\mathscr{T}_t \supset \mathscr{D}$, niin olemme näyttäneet koko yleisen väitteen, kunhan näytämme, että $\mathscr{D}$ on Dynkinin systeemi. Varma tapahtuma kuuluu selvästi joukkoon $\mathscr{D}$, sillä

$$\mathbf{E}\,(1 \,|\, \mathscr{H}_t) = 1 = \mathbf{E}\,(1 \,|\, X_t)\,.$$

Edelleen, jos $A \in \mathscr{D}$ ja $\mathscr{D} \ni B \subset A$, niin haluaisimme näyttää, että $A \setminus B \in \mathscr{D}$. Määritelmän nojalla $[\,A\,] \in \mathscr{Z}$ ja $[\,B\,] \in \mathscr{Z}$. Koska $[\,A \setminus B\,] = [\,A\,] - [\,B\,]$, niin joukon $\mathscr{Z}$ lineaarisuuden nojalla myös $[\,A \setminus B\,] \in \mathscr{Z}$, joten $A \setminus B \in \mathscr{D}$.

Viimeisenä kohtana on näyttää, että $\mathscr{D}$ on suljettu monotonisen suppenemisen suhteen, eli jos $(A_n) \subset \mathscr{D}$ on kasvava jono tapahtumia ja $A = \lim A_n$, niin $A \in \mathscr{D}$. Mutta jälleen määritelmän nojalla jono $([\,A_n\,]) \subset \mathscr{L}$ on monotonisesti kasvava jono positiivisia funktioita ja $[\,A\,] = \lim[\,A_n\,]$, niin koska $\mathscr{L}$ on suljettu monotonisten rajojen suhteen, on $[\,A\,] \in \mathscr{L}$ eli $A \in \mathscr{D}$. Siispä $\mathscr{D}$ on Dynkinin systeemi ja siten $\mathscr{D} = \mathscr{T}_t$ ja siten $\mathscr{L}$ sisältää kaikki rajoitetut ja $\mathscr{T}_t$-mitalliset satunnaismuuttujat.

Tehtävän opetus oli siinä, että mahdollisesti hyvin vaikeasti hahmotettavia σ-algebroja on mahdollista lähestyä yksinkertaisten askelten kautta. Tärkeintä on näyttää väite σ-algebran virittäjäjoukon π-systeemille ja loppu tuleekin Dynkinin lauseen ja monotonisen luokan lauseen kautta. Kannattaakin siksi yrittää pitää virittäjäjoukon π-systeemi niin pienenä kuin mahdollista, jotta osoittamista on vähemmän.

Huomasimme kuitenkin, että joskus vähemmän osoittamiseksi on osoitettava enemmän, mikä on yleinen piirre induktiotodistuksissa.