**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Stokastiset differentiaaliyhtälöt**
**Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 2**

1. Olkoon $(A_n)$ jono tapahtumia ja määritellään

$$\{\limsup_{n\to\infty} A_n\} := \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{ja} \quad \{\liminf_{n\to\infty} A_n\} := \bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n} A_k$$

Näytä, että

$$[\,\limsup_{n\to\infty} A_n\,](\omega) = \limsup_{n\to\infty} [\,A_n\,](\omega).$$

**Ratkaisuehdotus:** Oletetaan, että $[\,\limsup A_n\,](\omega) = 1$. Tämä tarkoittaa, että jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellainen $k \geq n$, että $\omega \in A_n$. Siispä

$$1 \geq \sup_{k\geq n} [\,A_k\,](\omega) \geq 1$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$, joten $\limsup [\,A_n\,](\omega) = 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että $[\,\limsup A_n\,](\omega) = 0$. Tämä tarkoittaa, että löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, että jokaisella $\omega \notin A_k$ jokaisella $k \geq n$. Siispä

$$\forall k \geq n \colon [\,A_k\,](\omega) = 0 \Longrightarrow \sup_{k\geq n} [\,A_k\,](\omega) = 0.$$

Antamalla nyt $n \to \infty$, päättelemme, että $\limsup [\,A_n\,](\omega) = 0$.

2. Olkoon $B$ Brownin liike ja $M > 0$. Määritellään tapahtumat $A(t)$, $t > 0$, seuraavasti

$$A(t) = \left\{ \sup_{0<s\leq t} \frac{|B(s)|}{s} > M \right\}$$

Näytä, että $A(t) \subset A(s)$ kun $t \leq s$ ja näytä, että

$$\mathbf{P}\left( \limsup_{n\to\infty} A(1/n) \right) = 1$$

**Ratkaisuehdotus:** Oletetaan, että $t \leq s$. Koska aina on voimassa

$$\sup_{0<u\leq t} \frac{|B(u)|}{u} \leq \sup_{0<u\leq s} \frac{|B(u)|}{u}$$

niin jos $A(t)$ tapahtuu, niin

$$M < \sup_{0<u\le t} \frac{|B(u)|}{u} \le \sup_{0<u\le s} \frac{|B(u)|}{u}$$

joten $A(s)$ tapahtuu. Siispä $A(t) \subset A(s)$. Koska

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A(1/n)\right) = \mathbf{E}\,[\,\limsup_{n\to\infty} A(1/n)\,] = \mathbf{E}\left(\limsup_{n\to\infty}[\,A(1/n)\,]\right),$$

niin monotonisen suppenemisen lauseen perusteella

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A(1/n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\,(\,A(1/n)\,)\,.$$

Jos $n|B(1/n)| > M$, niin supremumin määritelmän nojalla $A(1/n)$ tapahtuu. Siispä

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A(1/n)\right) \ge \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\,(\,|B(1/n)| > m/n\,)\,.$$

Koska $B(1/n) \sim X/\sqrt{n}$, missä $X \sim \mathfrak{N}(0,1)$, joten

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A(1/n)\right) \ge \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|W| > m/\sqrt{n}\right) = \mathbf{P}\,(\,|W| > 0\,) = 1,$$

koska $\mathbf{P}\,(\,W = 0\,) = 0$. Olemme siten päätelleet, että tapahtuman $\limsup A(1/n)$ todennäköisyys on vähintään 1 ja koska se on korkeintaan 1, niin väite seuraa.

3. Päättele kahden edellisen tehtävän avulla, että Brownin liikkeen polku $t \mapsto B(t)$ ei ole derivoituva, kun $t = t_0$ melkein varmasti. Jos haluat, voit miettiä, kuinka tästä voisi vielä päätellä, että Brownin liikkeen polut eivät ole missään derivoituvia todennäköisyydellä 1.

**Ratkaisuehdotus:** Tässä voimme käyttää Brownin liikkeen lisäysten stationaarisuutta eli $\widetilde{B}(t) := B(t+t_0) - B(t_0)$ on myös Brownin liike. Edellisen tehtävän avulla

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\downarrow t_0} \frac{|B(t)-B(t_0)|}{t-t_0} > M\right) = \mathbf{P}\left(\limsup_{t\downarrow 0} \frac{|B(t)|}{t} > M\right) = 1$$

Joten

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\downarrow t_0} \frac{|B(t)-B(t_0)|}{t-t_0} = \infty\right) = \mathbf{P}\left(\limsup_{M\to\infty}\limsup_{t\downarrow t_0} \frac{|B(t)-B(t_0)|}{t-t_0} > M\right) = 1$$

Tämä osoittaa väitteen, sillä jos $t \mapsto B(t)$ on derivoituva pisteessä $t = t_0$, niin yläraja-arvo olisi äärellinen.

Vaikka varsinainen tehtävä jo tulikin osoitettua, käymme läpi tuon yleisen derivoitumattomuuden. Voimme helposti yleistää väitteen rationaalipisteiden yli, eli

$$\mathbf{P}\left( A_M \right) := \mathbf{P}\left( \forall t_0 \in \mathbb{Q}\colon \limsup_{t \downarrow t_0} \frac{|B(t) - B(t_0)|}{t - t_0} \geq M \right) = 1$$

jokaisella $M > 0$ sekä $M = \infty$, sillä tämän komplementtitapahtuma voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä nollatapahtumista.

Haluaisimme vielä irrationaalipisteet mukaan, mutta tämän palauttaminen edelliseen tarvitsee hieman pohdintaa, joten teemme tämän helpommalla geometrisella argumentilla.

Riittää tarkastella tilannetta $T = [0,1)$, sillä voimme esittää koko $\mathbb{R}_+$:n numeroituvana yhdisteenä väleistä $[k, k+1)$ ja Brownin liikeellä on stationaariset lisäykset, joten kukin väli on "samanlainen". Jos $A = \{t \mapsto B(t)$ ei derivoidu missään välillä $[0,1)\}$ on haluttu tapahtuma, niin $A^C = \{t \mapsto B(t)$ on derivoituva jossakin pisteessä $t_0 \in [0,1)\}$. Siispä $A$ tapahtuu melkein varmasti jos $\mathbf{P}\left( A^C \right) = 0$. Mitä hyötyä tästä siirtymisestä komplementtitapahtumaan on? Jos annettu polku $f(t) := t \mapsto B(t, \omega)$ on derivoituva pisteessä $t_0$, niin löydämme jonkin avoimen välin $(a,b) \ni t_0$, että ainakin

$$|f(t) - f(t_0)| \leq M|t - t_0| \tag{$*$}$$

jokaisella $t \in (a,b)$. Jos valitsemme suuren luvun $N \in \mathbb{N}_+$ ja jaamme välin $[0,1)$ tasaisesti $N$ yhtäsuureen osaan $I_{N,k} := [k/N, (k+1)/N)$, niin jos $N$ on riittävän suuri, niin välille $[t_0, b) \subset (a,b)$ mahtuu ainakin kolme osaväliä $I_{N,m}$, $I_{N,m+1}$ ja $I_{N,m+2}$ (huomautuksena mainittakoon, että luku kolme on yleensä "suuri luku" ja käy äärettömän korvikkeeksi monessa tilanteessa, kuten myös nyt). Luku kolme ei tietty ole mitenkään erityinen vaan valitsemalla $N$ riittävän suureksi, niin väliin $(a,b)$ voi mahduttaa mielivaltaisen monta osaväliä.

Nyt voimme yhdistää oletyksen $(*)$ näihin osaväliajatuksiin. Kun $I_{N,j} \subset (a,b)$, niin

$$|f((j+1)/N) - f(j/N)| \leq M(|(j+1)/N - t_0| + |j/N - t_0|)$$

Kun $m = \lfloor Nt_0 \rfloor$, niin $t_0 \leq m/N < t_0 + 1/N$, joten

$$|f((m+1)/N) - f(m/N)| \leq M((m+1)/N - t_0 + m/N - t_0) \leq 3M/N$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}|f((m+2)/N) - f((m+1)/N)| &\le 5M/N, \qquad \text{ja}\\ |f((m+3)/N) - f((m+2)/N)| &\le 7M/N\end{aligned}$$

Olemme siten päätelleet, että kaikilla riittävän suurilla $N$ löydämme sellainen luvun $m = 0, \dots, N-3$, että

$$\omega \in D_{N,m} = \{|\nabla_+^{(h)} B(hk)| \le 7hM \text{ kun } k = m, m+1, m+2\}$$

Huomaamme jo alkuosan perusteella että tämä tapahtuma $D_{N,m}$ on varsin epätodennäköinen. Tätä tulemme käyttämään apuna loppupäätelmässäkin.

Koska edellinen päätelmä vaati vain luvun $N$ valitsemisen riittävän suureksi, olemme päätelleet että

$$A^C \subset \{\limsup_{j\to\infty} D_{n_j}\}$$

kun tapahtuma $D_n$ on

$$D_n = \{D_{n,k} \text{ jollakin } k = 0, 1, \dots, n-3\}$$

ja $(n_j) \subset \mathbb{N}$ on mikä tahansa osajono. Väitteen Brownin liikkeen polkujen derivoimattumuudesta missään osoittamiseksi riittää siis näyttää, että

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{j\to\infty} D_{n_j}\right) = 0$$

jollakin osajonolla $(n_j) \subset \mathbb{N}$. Tiedämmekin jo, että

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{j\to\infty} D_{n_j}\right) = \lim_{j\to\infty} \mathbf{P}\,(\,D_{n_k} \text{ jollakin } k \ge j\,) \le \lim_{j\to\infty} (1 \wedge \sum_{k\ge j} \mathbf{P}\,(\,D_{n_k}\,)).$$

Jos sarja

$$S := \sum_k \mathbf{P}\,(\,D_{n_k}\,)$$

suppenee, niin arvion oikealla puolella oleva sarjan jäännöstermi häviää, joten tällöin

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{j\to\infty} D_{n_j}\right) = 0.$$

Tämä päätelmä: ”jos $\sum \mathbf{P}\,(\,A_k\,)$ on suppeneva sarja, niin $\mathbf{P}\,(\,\limsup A_k\,) = 0$” on kuuluisa *Borelin-Cantellin lemma* tai tarkemmin *Borelin-Cantellin ensimmäinen lemma.*

Nimi tällä hyödylliselle lemmalle on annettu Émile Borelin ja Francesco Paolo Cantellin mukaan. Väitteen osoittamiseksi riittää siten näyttää, että $\mathbf{P}\,(\,D_n\,) \to 0$ kun $n \to \infty$, sillä tällöin voimme poimia osajonon $(n_j)$ jolla sarja $S$ suppenee.

Nyt helppo arvio yhdistettynä Brownin liikkeen lisäysten stationaarisuuteen näyttää, että

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(\,D_n\,) &\leq \sum_{m=0,\ldots,n-3} \mathbf{P}\left(\,|\nabla_+^{(h)} B(hk)| \leq 7hM \text{ kun } k = m, m+1, m+2\right) \\ &\leq n\mathbf{P}\left(\,|\nabla_+^{(h)} B(hk)| \leq 7hM \text{ kun } k = 0, 1, 2\right).\end{aligned}$$

Koska Brownin liikkeen lisäykset ovat lisäksi riippumattomia, niin

$$\mathbf{P}\,(\,D_n\,) \leq n(\mathbf{P}\,(\,|B(h)| \leq 7hM\,))^3.$$

Alkuosan perusteella muistamme, että

$$\mathbf{P}\,(\,|B(h)| \leq 7hM\,) = \mathbf{P}\left(|W| \leq 7\sqrt{h}M\right) \approx \mathscr{O}\sqrt{h}$$

missä viimeisessä päätelmässä käytimme hyväksi tietoa, että normaalijakautuneella satunnaismuuttujalla $W$ on tiheysfunktio, joten todennäköisyys, että $W$ kuuluu lyhyelle välille on samaa suuruusluokkaa kuin välin pituus, mikä tässä tapauksessa oli suuruusluokkaa $\sqrt{h}$. Yhdistämällä nämä, ja käyttämällä yhteyttä $h = 1/n$, saamme

$$\mathbf{P}\,(\,D_n\,) \approx \mathscr{O}(nh^{3/2}) = \mathscr{O}(n^{-1/2})$$

joten $\lim \mathbf{P}\,(\,D_n\,) = 0$. Nyt myös huomaamme, miksi kummassa tarvitsimme kolmen lisäyksen huomioimista. Jos olisimme tarkastelleet vain yhtä lisäystä, olisi edellinen arvio ollut suuruusluokkaa $n^{1/2}$. Jos olisimme käyttäneet kahta, olisimme päätyneet suuruusluokkaan 1. Nämä eivät olisi siten antaneet väitettä. Toisaalta jos lisäyksiä olisi otettu mukaan $m$ kappaletta ja $m \geq 3$, niin olisimme päätyneet arvioon $\mathbf{P}\,(\,D_n\,) \approx \mathscr{O}(n^{1-m/2})$, joten kaikki nämäkin olisivat antaneet halutun tuloksen.

Oikeampi tapa olisi siis ollut valita $m$ kappaletta lisäyksiä ja päätellä, että $m \geq 3$ riittäisi. Helpottaakseni käsittelyä vedin luvun kolme hatusta käyttämällä tätä päättelyä ensin ja rakentamalla päättelyn tälle maagiselle luvulle 3.

Tämä päättää osoituksen. Loppuosan opettavainen puoli oli se, että arviot ovat yleensä varsin yksinkertaisia ja että Borelin–Cantellin lemmalla voi osoittaa kätevästi monenlaisia rajankäyntiin liittyviä tarkasteluja.

4. Määritellään *fraktionaalinen Brownin liike* $Z_H(t)$, joka toteuttaa Brownin liikkeen määritelmän seuraavin muutoksin:

– $\mathbf{E}\, Z_H(t)^2 \; = t^{2H}$ ja

– lisäykset ovat stationaarisia, mutta eivät välttämättä riippumattomia

Oletamme, että $H \in (0,1)$. Määrää tämän ehdon avulla kovarianssifunktio $k(t,s) := \mathbf{E}\, Z_H(t) Z_H(s)$ .

**Ratkaisuehdotus:** Tämä tehtävä onkin helpohko algebrallinen pyörittely. Laskemme ensin mitä on

$$a_-(t,s) = \mathbf{E}\,(Z_H(t) - Z_H(s))^2 \; = \mathbf{E}\, Z_H(t)^2 \; - 2k(t,s) + \mathbf{E}\, Z_H(s)^2\,,$$

joten $k(t,s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - a_-(t,s))$. Nyt $Z_H(t) - Z_H(s) \sim Z_H(t-s)$, joten

$$a_-(t,s) = \mathbf{E}\,(Z_H(t-s))^2 \; = |t-s|^{2H}$$

Siispä $k(t,s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$.

5. Näytä, että siltakävely (Esimerkki 3.5) ei ole aikastationaarinen.

**Ratkaisuehdotus:** Tehtävä on varsin yksinkertainen ainakin järkevillä lisäoletuksilla. Kunhan $d > 2$, niin $d-1 > 1$. Jos $n = d-1$ ja $X_n = 1$, niin

$$\nabla_+ X(n) = \lfloor -1 \rfloor + \xi_n = \xi_n - 1$$

Jos $m = 1$ ja $X_m = 1$, niin

$$\nabla_+ X(m) = \xi_m.$$

Siis $\mathbf{P}\,(\, X(m+1) = 2 \,|\, X(m) = 1\,) \; = \; \frac{1}{2}$, mutta $\mathbf{P}\,(\, X(n+1) = 2 \,|\, X(n) = 1\,) \; = \; 0$, joten ketju ei ole aikastationaarinen. Jotta ei syntyisi epäilystä siitä, onko mahdollista että ketju on tilassa 1 ajanhetkillä 1 ja $n-1$, voimme päätellä seuraavasti. Ajanhetki 1 on selviö, sillä $X(1) = \pm 1$. Jos $d = 2k$ jollakin, niin $d - 1 = 2k - 1$. Polku $X(0) = 0, X(1) = 1, X(2) = 0, X(3) = 1, \ldots, X(2k-2) = 0$ on täysin mahdollinen sillä näissä tilanteissa lattiafunktio on aina 0, joten myös $\{X(d-1) = 1\}$ on mahdollinen tapahtuma.