Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 10

1. Päättele, että tasossa

$$\mathbf{E}_x\, u\,(B_\eta) = \int u(y)\mu(\,\mathrm{d}y)$$

kun μ on yksikköympyrän S_1 normeerattu pintamitta seuraavin askelin.

i) Jaa yksikköympyrä S_1 tasaisesti n kappaleeseen kaarenpätkiä $I_{k,n}$ ja näytä, että

$$\mathbf{P}_x\,(\,B_\eta \in I_{k,n}\,) = 1/n$$

jokaisella k. (Vihje. rotaatiosymmetria)

ii) Näytä väite yksinkertaisille funktioille u yksikköympyrän päällä

iii) Näytä väite jatkuville funktiolle u ja sen jälkeen halutessasi mitallisille funktiolle

Ratkaisuehdotus: Kohta *i*) on helppo ainakin, kun huomaamme, että tehtävänanto tarkoitti tietenkin, että $x = 0$. Koska tiedämme (esimerkiksi Harjoituksen 9) nojalla, että jos

$$c_k := \mathbf{P}_x\,(\,B_\eta \in I_{k,n}\,)$$

niin jos R on tasoa kierto origon yhmäpi kulman $j2\pi/n$ verran, niin saatu prosessi RB on myös Brownin liike, joten

$$c_k = \mathbf{P}_x\,(\,RB_\eta \in I_{k,n}\,) = \mathbf{P}_x\,(\,B_\eta \in I_{l,n}\,) = c_l$$

kun $l = k - j + [\,k < j\,]n$. Siispä havaitsemme, että $c_k = c$ kun $k = 1, \ldots, n$. Toisaalta

$$1 = \mathbf{P}_x\,(\,B_\eta \in S_1\,) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_x\,(\,B_\eta \in I_{k,n}\,) = nc$$

joten $c_k = c = 1/n$.

Kohta *ii*) saadaan kohdasta *i*), sillä jos

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k[\,I_{k,n}\,]$$

niin

$$\mathbf{E}_x\, u\,(B_\eta) = \sum_k a_k \mathbf{P}_x\,(\, B_\eta \in I_{k,n}\,) = \sum_k a_k/n = \int u(y)\mu(\,\mathrm{d}y),$$

sillä $\mu(I_{k,n}) = 1/n$.

Kohdassa *iii)* aloitamme jatkuvasta funktiosta u. Koska yksikköpallo on kompakti, niin funktio u on tasaisesti jatkuva. Siispä jokaista $n \in \mathbb{N}_+$ kohti löydämme sellaisen $m \in \mathbb{N}_+$, jolle

$$|u(y) - \sum_{k=1}^{m} u(x_k)[\, x \in I_{k,m}\,]| =: |u(y) - u_m(y)| < \frac{1}{n}$$

jokaisella $y \in S_1$, kun $y_k \in I_{k,m}$. Integroimalla pintamitan suhteen, havaitsemme, että

$$\Big| \int \Big(u(y) - u_m(y)\Big)\mu(\,\mathrm{d}y)\Big| < \frac{1}{n}$$

Koska toisaalta

$$\int \sum_{k=1}^{m} u(x_k)[\, y \in I_{k,m}\,]\mu(\,\mathrm{d}y) = \sum_k u(x_k)/m = \mathbf{E}_0\, u_m(B_\eta)\,,$$

ja myös

$$\Big|\mathbf{E}_0 \Big(u(B_\eta) - u_m(B_\eta)\Big)\Big| < \frac{1}{n},$$

joten

$$\Big|\mathbf{E}_0\, u(B_\eta)\; - \int_{S_1} u(y)\mu(\,\mathrm{d}y)\Big| < \frac{2}{n}$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}_+$, joten väite on osoitettu myös jatkuville funktiolle. Nyt voimme jatkaa päättelyä siten, että jokaisen avoimen kaarenpätkän indikaattori $[\, U\,]$ saadaan monotonisena jonona jatkuvista funktioista, joten monotonisen suppenemisen ominaisuuden avulla väite pätee jokaiselle avoimelle kaarenpätkälle. Nämä muodostavat π-systeemin, joten monotonisen luokan lauseen avulla kaikki rajoitetut ja mitalliset funktiot toteuttavat väitteen.

2. Näytä, että jos $x \in \Gamma$ on säännöllinen piste, niin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau \le t\,) = 1$$

jokaisella $t > 0$ ja jokaisella $x_n \to x$. Tämän osoittamiseksi, osoita seuraavat:

i) näytä ensin, että jos $x_n \to x$ oli x mikä tahansa reunan piste, niin

$$\liminf \mathbf{P}_{x_n}\,(\, \tau \le t\,) \ge \mathbf{P}_x\,(\, \tau \le t\,)$$

$ii)$ päättele väite tästä.

Ratkaisuehdotus: Palautamme mieleen, että tapahtuma $\{\tau \le t\}$ voidaan esittää muodossa,

$$\{\tau \le t\} = \{B_s \in G^C \text{ jollakin } s \in (0,t]\}$$

sillä G on avoin ja siis G^C on suljettu. Voimme approksimoida tätä monotonisen jonon $[\, A_n \,] \uparrow [\, \tau \le t \,]$ avulla, missä

$$A_n := \{B_s \in G^C \text{ jollakin } s \in (1/n, t]\}.$$

Voimme soveltaa Markovin ominaisuutta ajanhetkellä $1/n$ ja päättelemme, että

$$\mathbf{P}_z\,(\, A_n \,) = \mathbf{E}_z\,\mathbf{P}\left(\, A_n \,|\, \mathscr{H}_{1/n} \right) = \mathbf{E}_z\,\mathbf{P}_{B(1/n)}\,(\, \tau \le t - 1/n \,)\ .$$

Tämä on tärkeä tieto, sillä nyt voimme päätellä, että funktio $f_n(z) := \mathbf{P}_z\,(\, A_n \,)$ on jatkuva jokaisella n. Tämä siksi, että jokaisella tapahtumalla $A \in \mathscr{S}$ sekä *positiivisella ajanhetkellä* $s > 0$ on voimassa

$$\mathbf{E}_z\,\mathbf{P}_{B_s}\,(\, A \,) \;=\; \int p_s(z,y)\mathbf{P}_y\,(\, A \,)\ \mathrm{d}y$$

missä $p_s(z,y) = c\exp\left(-|z-y|^2/2s\right)$ on normaalijakautuneen satunnaismuuttujan B_s tiheysfunktiona jatkuva muuttujan x suhteen ja siten dominoidun suppenemisen lauseen mukaan

$$\lim_{w\to z} \mathbf{E}_w\,\mathbf{P}_{B_s}\,(\, A \,) \;=\; \int \lim_{w\to z} p_s(w,y)\mathbf{P}_y\,(\, A \,)\ \mathrm{d}y = \mathbf{E}_z\,\mathbf{P}_{B_s}\,(\, A \,)\ .$$

On tärkeää huomata, että jos $s = 0$, niin satunnaismuuttujalla B_0 ei ole jatkuvaa tiheysfunktiota, joten edellinen päätelmä olisi karahtanut siinä kivikkoon. Tämä onkin se syy, että jouduimme arvioimaan alkuperäistä tapahtumaa $\{\tau \le t\}$ tällaisilla hieman aikasiirretyille approksimaatioilla.

Olemme siten päätelleet, että $f(z) := \mathbf{P}_z\,(\, \tau \le t \,)$ on *kasvavan jonon jatkuvia funktioita* raja-arvo. Tämä takaakin jo, että f on *alhaalta puolijatkuva*, mikä olikin kohdan $i)$ väite. Mutta täydellisyyden vuoksi näytetään tämä vielä. Koska $f(z) = \sup f_n(z)$, niin

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \liminf_{n\to\infty} \sup_k f_k(x_n) \ge \liminf_{n\to\infty} f_k(x_n)$$

jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Koska f_k on jatkuva ja $x_n \to x$, niin

$$\liminf_{n\to\infty} f_k(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = f_k(x).$$

Siispä

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f_k(x)$$

jokaisella k ja siten pienimmän ylärajan määritelmän nojalla

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq \sup_k f_k(x) = f(x),$$

mikä olikin kohdan i) väite.

Kohta ii) on nyt selviö. Jos x on säännöllinen piste, niin $f(x) = \mathbf{P}_x(\tau \leq t) = 1$. Siispä kohdan i) nojalla

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_{x_n}(\tau \leq t) \geq \mathbf{P}_x(\tau \leq t) = 1,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{x_n}(\tau \leq t) = 1$$

jokaisella t.

3. Näytä käyttämättä kartioehtoa että välin $(a,b) \subset \mathbb{R}$ reunapisteet ovat aina säännöllisiä.

Ratkaisuehdotus: Tehtävä on siis osoittaa, että $\mathbf{P}_x(\tau = 0) = 1$, kun $x = a$ tai $x = b$ ja τ on poistumishetki väliltä (a,b).

Oletetaan, että $x = a$. Jos $\tau > t$, niin $B_s \in (a,b)$ jokaisella $s \in (0,t)$, joten erityisesti $B_{t/2} \in (a,b)$. Siispä

$$\mathbf{P}_a(\tau > t) \leq \mathbf{P}_a\Big(B_{t/2} \in (a,b)\Big) = \mathbf{P}_0\Big(B_{t/2} \in (0, b-a)\Big).$$

Koska $B_{t/2} \sim \sqrt{t/2}U$, niin

$$\mathbf{P}_a(\tau > t) \leq \mathbf{P}_0\Big(0 < U < (b-a)(t/2)^{-1/2}\Big) \leq \tfrac{1}{2}.$$

Siispä $\mathbf{P}_a(\tau > t) \leq \frac{1}{2}$ jokaisella $t > 0$. Kun $s > t$, niin ehdosta $\tau > s$ seuraa, että $\tau > t$, joten $[\tau > s] \leq [\tau > t]$. Voimme siten soveltaa monotonisen suppenemisen ominasisuutta ja päättelemme, että

$$\mathbf{P}_a(\tau > 0) = \lim_{t\downarrow 0} \mathbf{P}_a(\tau > t) \leq \tfrac{1}{2},$$

joten $\mathbf{P}_a(\tau = 0) \geq \frac{1}{2}$. Nyt Blumenthalin 0-1 -laki sanoo, että $\mathbf{P}_a(\tau = 0) = 1$, joten väite seuraa.

4. Osoita Blumenthalin 0-1 -laki näyttämällä, että jos $A \in \widehat{\mathscr{H}_0}$, niin

$$\mathbf{P}_x\,(\,A\,) = [\,x \in A\,]$$

Ratkaisuehdotus: Oikea väitehän olisi ollut

$$\mathbf{P}_x\,(\,B_0 \in A\,) = [\,x \in A\,]$$

kun $A \in \mathscr{S}$. Olkoon $\{B_0 \in A\} \in \widehat{\mathscr{H}_0}$. Tällöin se kuuluu myös tulevaisuuteen $\mathscr{T}_0$, joten Markovin ominaisuuden nojalla

$$\mathbf{P}\left(\,B_0 \in A \,|\, \widehat{\mathscr{H}_0}\,\right) = \mathbf{P}_{B(0)}\,(\,B_0 \in A\,)$$

melkein varmasti. Toisaalta $[\,B_0 \in A\,]$ on $\widehat{\mathscr{H}_0}$-mitallinen, joten melkein varmasti

$$\mathbf{P}\left(\,B_0 \in A \,|\, \widehat{\mathscr{H}_0}\,\right) = \mathbf{E}\left([\,B_0 \in A\,] \,|\, \widehat{\mathscr{H}_0}\right) = [\,B_0 \in A\,]$$

Kun $B_0 = x$ melkein varmasti, niin

$$\mathbf{P}_x\,(\,B_0 \in A\,) = \mathbf{P}_{B_0}\,(\,B_0 \in A\,) = \mathbf{P}\left(\,B_0 \in A \,|\, \widehat{\mathscr{H}_0}\,\right) = [\,B_0 \in A\,] = [\,x \in A\,]$$

melkein varmasti.