Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Ratkaisuehdotelma Harjoitukseen 1

1. Olkoon (X_n) jono reaaliarvoisia positiivisia satunnaismuuttujia. Näytä, että $Y := X_1 + X_2$, $Z := X_1 X_2$ sekä

$$W := \inf_n X_n$$

ovat satunnaismuuttujia.

Oletamme tunnetuksi tiedon, että jos $\{X_j \leq x_j \text{ jokaisella } j = 1, \ldots, d\}$ on tapahtuma kaikilla $x_j \in \mathbb{R}$, niin $(X_1, \ldots, X_d)$ on satunnaismuuttuja. Tästä nimittäin seuraa, että tällöin myös $\{(X_1, \ldots, X_d) \in A\}$ on tapahtuma jokaisella Borelin joukolla $A \subset \mathbb{R}^d$.

Nyt tapahtuma

$$\{Y \leq x\} = \{f(X_1, X_2) \leq x\} = \{(X_1, X_2) \in U_x\},$$

kun $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ja $U_x = \{\ (x_1, x_2) : \ x_1 + x_2 \leq x\ \}$. Nyt tasojoukko U_x on suljettu, joten jos (X_1, X_2) on myös satunnaismuuttuja, niin Y on satunnaismuuttuja. Myös Z saadaan samalla päättelyllä, sillä

$$\{Z \leq x\} = \{g(X_1, X_2) \leq x\} = \{(X_1, X_2) \in V_x\},$$

kun $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ja $V_x = \{\ (x_1, x_2) : \ x_1 x_2 \leq x\ \}$.

Riittää siis tietää, että (X_1, X_2) on satunnaismuuttuja. Tämän näyttämiseksi haluamme näyttää, että $\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\}$ on tapahtuma. Mutta tämä on kahden tapahtuman $\{X_1 \leq x_1\}$ ja $\{X_2 \leq x_2\}$ leikkauksena tapahtuma.

Olemme nyt näyttäneet, että Y ja Z ovat satunnaismuuttujia. Jäljellä on vielä W. Jos $X_n \geq x$ jokaisella n niin myös $\inf X_n \geq x$. Toisaalta, jos $\inf X_n \geq x$, niin x on jokin joukon $\{X_0, X_1, \ldots\}$ alaraja, joten $X_n \geq x$ jokaisella n. Siispä

$$\{W \geq x\} = \{X_n \geq x \text{ jokaisella } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \geq x\} \in \mathscr{F},$$

joten W on satunnaismuuttuja.

2. Näytä, että jos $X \geq 0$ on reaaliarvoinen satunnaismuuttuja, niin satunnaismuuttujat $\widehat{X}^\varepsilon := \varepsilon \lfloor X/\varepsilon \rfloor$ suppenevat monotonisesti kohti satunnaismuuttujaa X, kun

$\varepsilon = 2^{-n} \downarrow 0$. Tässä ja muulloin $\lfloor x \rfloor := k \in \mathbb{Z}$, joko toteuttaa $k \leq x < k+1$. **Korjaus: Oletamme siis lisäksi, että $\varepsilon = 2^{-n}$.**

Jos $n \in \mathbb{N}$ on valittu ja merkitsemme $\varepsilon = 2^{-n}$ ja $\delta = 2^{-(n+1)} = \varepsilon/2$, niin jos $\widehat{X}^{\varepsilon} = \varepsilon k$, niin $\varepsilon k \leq X < \varepsilon k + \varepsilon$. Tästä seuraa, että $2\delta k \leq X < 2\delta k + 2\delta$, joten joko $\widehat{X}^{\delta} = 2\delta k = \widehat{X}^{\varepsilon}$ tai $\widehat{X}^{\delta} = 2\delta k + \delta = \widehat{X}^{\varepsilon} + \delta \geq \widehat{X}^{\varepsilon}$. Siispä

$$\widehat{X}^{\varepsilon} = \sum_k \widehat{X}^{\varepsilon}[\,\widehat{X}^{\varepsilon} = \varepsilon k\,] \leq \sum_k \widehat{X}^{\delta}[\,\widehat{X}^{\varepsilon} = \varepsilon k\,] = \widehat{X}^{\delta}$$

Siispä jono $(Y_n) = \widehat{X}^{2^{-n}}$ on monotonisesti kasvava jono. Koska $X \geq 0$, niin $Y_n \geq 0$, joten jono on myös positiivinen. Suppeneminen kohti satunnaismuuttujaa X on selviö, sillä olemme jo todenneet, että jos $Y_n = \varepsilon k$, niin $Y_n = \varepsilon k \leq X < \varepsilon k + \varepsilon = Y_n + \varepsilon$. Siispä tällöin $|X - Y_n| \leq \varepsilon$, joten

$$|X - Y_n| = \sum_k |X - Y_n|[\,Y_n = \varepsilon n\,] \leq \varepsilon = 2^{-n}.$$

3. Osoita, että yleisessä tilanteessa satunnaismuuttujan $f(X)Y$ ehdollinen odotusarvo

$$\mathbf{E}\,(f(X)Y \,|\, X) = f(X)\mathbf{E}\,(Y \,|\, X)$$

melkein varmasti.

Oletetaan, että tehtävän yleinen tilanne tarkoittaa sitä, että molempien puolien tulisi olla määriteltyjä. Ehdollinen odotusarvo oli määritelty vain integroituville satunnaismuuttujalle. Jos oletamme, että $X, Y \geq 0$ (mikä ei juurikaan yleisyyttä rajoita) ja $f(X) \geq 0$, niin ainakin $\mathbf{E}\,Y < \infty$. Jotta $f(X)Y$ olisi satunnaismuuttuja, niin kuvauksen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ on oltava ainakin mitallinen. Mutta juurikaan yleisyyttä rikkomatta voimme olettaa, että f on rajoitettu.

Koska sekä $f(X)$ ja $\mathbf{E}\,(Y \,|\, X)$ ovat molemmat $\sigma(X)$-mitallisia satunnaismuuttujia, niin niiden tulo on myös. Edelleen kun $f(X) \leq M$ on rajoitettu, niin tulon odotusarvo

$$\mathbf{E}\,f(X)\mathbf{E}\,(Y \,|\, X) \leq M\mathbf{E}\,\mathbf{E}\,(Y \,|\, X) < \infty,$$

Siispä $f(X)\mathbf{E}\,(Y \,|\, X)$ täyttää ehdollisen odotusarvon muut vaatimukset, joten riittää osoittaa, että

$$\mathbf{E}\,[\,X \in B\,]\mathbf{E}\,(f(X)Y \,|\, X) = \mathbf{E}\,[\,X \in B\,]f(X)\mathbf{E}\,(Y \,|\, X)$$

on voimassa kaikilla $B \in \mathscr{S}$.

Osoitetaan väite ensin yksinkertaisille (rajoitetuille) funktioille f. Tällöin

$$f(X) = \sum_k f(a_k)[\, X \in A_k \,]$$

Nyt määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,[\, X \in B \,]\mathbf{E}\,(f(X)Y \,|\, X) &= \sum_k f(a_k)\mathbf{E}\,[\, X \in A_k B \,]Y \\
&= \sum_k f(a_k)\mathbf{E}\,[\, X \in A_k B \,]\mathbf{E}\,(Y \,|\, X) \\
&= \sum_k f(a_k)\mathbf{E}\,[\, X \in A_k B \,]\mathbf{E}\,(Y \,|\, X) \\
&= \mathbf{E}\, f(X)[\, X \in B \,]\mathbf{E}\,(Y \,|\, X) \ ,
\end{aligned}$$

joten väite pitää paikkaansa ainakin yksinkertaisille funktioille f.

Nyt monotonisen suppenemisen ja edellisen kohdan nojalla voimme approksimoida satunnaismuuttujaa $f(X)$ satunnaismuuttujalla $Z_n := \widehat{f(X)}^{\varepsilon}$, kun $\varepsilon = 2^{-n}$. Tällöin

$$Z_n = \sum_k k2^{-n}[\, k \leq f(X)2^n < k+1 \,].$$

Oikean puolen tapahtumat voidaan esittää muodossa $\{X \in A_k\}$, joten

$$\mathbf{E}\,[\, X \in B \,]\mathbf{E}\,(Z_n Y \,|\, X) = \mathbf{E}\, Z_n[\, X \in B \,]\mathbf{E}\,(Y \,|\, X) \ ,$$

Soveltamalla monotonisen suppenemisen lausetta oikeaan puoleen, näemme, että se suppenee kohti odotusarvoa

$$\mathbf{E}\,[\, X \in B \,]f(X)\mathbf{E}\,(Y \,|\, X) \ ,$$

Vasemmalla puolella Z_n on edelleen ehdollisen odotusarvon sisällä. Koska ehdollinen odotusarvo on myös monotoninen, niin ainakin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,[\, X \in B \,]\mathbf{E}\,(Z_n Y \,|\, X) = \mathbf{E}\,[\, X \in B \,] \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,(Z_n Y \,|\, X) \ .$$

Nyt voimme soveltaa ehdollista monotonisen suppenemisen ominaisuutta, jonka nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,(Z_n Y \,|\, X) = \mathbf{E}\,(f(X)Y \,|\, X)$$

melkein varmasti. Siispä

$$\mathbf{E}\,[\, X \in B \,]\mathbf{E}\,(f(X)Y \,|\, X) = \mathbf{E}\,[\, X \in B \,]f(X)\mathbf{E}\,(Y \,|\, X)$$

on voimassa kaikilla $B \in \mathscr{S}$ ja väite seuraa.

4. Osoita ehdollinen Fatoun lemma käyttämällä tavallista monotonisen suppenemisen ominaisuutta. Eli jos (X_n) on jono positiivisia satunnaismuuttujia ja $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ on jokin σ-algebra, niin

$$\mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \,|\, \mathscr{G}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(X_n \,|\, \mathscr{G}\right)$$

melkein varmasti.

Määritellään jono $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$, joka on tehtävän 1 nojalla satunnaismuuttuja. Toisaalta $Y_{n+1} \geq Y_n$, sillä otamme suurimman alarajan yli osajoukon. Siispä (Y_n) on kasvava jono satunnaismuuttuja, ja koska (X_n) oli positiivinen jono, on myös (Y_n) positiivinen.

Nyt jos $B \in \mathscr{G}$, niin jono $Z_n = [\,B\,]Y_n$ on myös kasvava jono satunnaismuutujia. Siispä

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,[\,B\,]Y_n = \mathbf{E}\,[\,B\,] \lim_{n\to\infty} Y_n\,.$$

Oletamme, että rajasatunnaismuuttujalla $\lim Y_n =: Y$ on äärellinen odotusarvo, sillä muuten väite ei ole tarkkaan määritelty, mutta palaamme tähän kohta. Tässä tapauksessa

$$Y = \liminf X_n.$$

joten olemme näyttäneet, että

$$\mathbf{E}\,[\,B\,]\mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \,|\, \mathscr{G}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,[\,B\,]\mathbf{E}\left(Y_n \,|\, \mathscr{G}\right)\;.$$

Koska tehtävänanto tuntui jotenkin kieltävän ehdollisen monotonisen suppenemisen käytön, jatkamme argumenttia hieman. Nyt $\mathbf{E}\left(Y_n \,|\, \mathscr{G}\right) \leq \mathbf{E}\left(Y_{n+1} \,|\, \mathscr{G}\right)$, joten voimme soveltaa monotonisen suppenemisen lausetta ja siis

$$\mathbf{E}\,[\,B\,]\mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \,|\, \mathscr{G}\right) = \mathbf{E}\,[\,B\,] \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(Y_n \,|\, \mathscr{G}\right)\;.$$

Koska jono $(\mathbf{E}\left(Y_n \,|\, \mathscr{G}\right))$ on kasvava, on raja sama kuin pienin yläraja, joten raja $Z = \lim \mathbf{E}\left(Y_n \,|\, \mathscr{G}\right)$ on varmasti $\mathscr{G}$-mitallinen. Jos lisäksi tämä yläraja on integroituva, niin olemme näyttäneet, että

$$\mathbf{E}\,[\,B\,]\mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \,|\, \mathscr{G}\right) = \mathbf{E}\,[\,B\,]Z$$

jokaisella $B \in \mathscr{G}$, joten määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(Y_n \,|\, \mathscr{G}\right) = Z = \mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \,|\, \mathscr{G}\right)$$

melkein varmasti. Olemme siis välituloksena oikeastaan osoittaneet ehdollisen monotonisen suppenemisen lauseen, kunhan näytämme, että $\mathbf{E}\,Z < \infty$. Tämä on kuitenkin varsin selvää, sillä monotonisen suppenemisen lauseen mukaan

$$\mathbf{E}\,Z = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,\mathbf{E}\,(Y_n \,|\, \mathscr{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,Y_n = \mathbf{E}\,Y < \infty$$

Loppu meneekin sitten vakiotekniilla, sillä $Y_n \leq X_k$ jokaisella $k \geq n$, joten

$$\mathbf{E}\,(Y_n \,|\, \mathscr{G}) \leq \inf_{k\geq n} \mathbf{E}\,(X_k \,|\, \mathscr{G})$$

melkein varmasti, joten pienimmän ylärajan määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,(Y_n \,|\, \mathscr{G}) = \sup_{n\geq 1} \mathbf{E}\,(Y_n \,|\, \mathscr{G}) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbf{E}\,(X_k \,|\, \mathscr{G}) \,.$$

Siispä

$$\mathbf{E}\,(\liminf X_n \,|\, \mathscr{G}) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbf{E}\,(X_k \,|\, \mathscr{G})$$

joten väite seuraa.

Koska on hieman epäeleganttia, että joudumme lisäämään oletuksen $\mathbf{E}\,Y < \infty$, niin voisimme laajentaa ehdollisen odotusarvon määritelmää positiivisille satunnaismuuttujille asettamalla

$$\mathbf{E}\,(X \,|\, \mathscr{G}) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,([\,X \leq n\,]X \,|\, \mathscr{G}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\,([\,\lceil X \rceil = k\,]X \,|\, \mathscr{G})$$

Tällöin kukin satunnaismuuttujista $[\,\lceil X \rceil = k\,]X$ on rajoitetettu, joten taatusti sen odotusarvo on äärellinen. Jos $\mathbf{E}\,X < \infty$, niin tiedämme ehdollisen monotonisen suppenemisen lauseen nojalla, että tämä määritelmä antaa saman ehdollisen odotusarvon (melkein varmasti) kuin alkuperäinenkin. Lisäksi tällä määritelmällä ehdollisen monotonisen suppenemisen ominaisuudesta voidaan tiputtaa oletus integroituvuudesta, joten voisimme siten poistaa sen myös Fatoun lemmasta.

5. Olkoon $X \sim \mathfrak{N}(0,1)$. Näytä, että

$$\mathbf{E}\,X^{2n} = (2n-1)!! =: (2n-1) \times (2n-3) \times \ldots 3 \times 1$$

jokaisella $n \geq 1$ ja näytä tämän avulla, että Lauseen 2.4. Hölderin eksponentiksi voidaan saada mikä tahansa luku $\lambda < \frac{1}{2}$.

Käytämme hyväksi tietoa, että X:llä on tiheysfunktio

$$f(x) = Ce^{-x^2/2},$$

missä C on normalisointivakio. Merkitsemme $a(2n) = \mathbf{E}\, X^{2n}$. Nyt odotusarvo on laskettavissa tiheysfunktion avulla, joten

$$a(2n) = C \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = -C \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1}(-xe^{-x^2/2})\, \mathrm{d}x$$

Koska $-xe^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}e^{-x^2/2}$, niin integroimalla osittain (ja tietämällä sen, että eksponenttifunktio menee paljon nopeammin nollaan kuin potenssifunktio), niin

$$\begin{aligned} a(2n) &= C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x^{2n-1} = (2n-1)C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{2(n-1)}\, \mathrm{d}x \\ &= (2n-1)a(2n-2) \end{aligned}$$

Saimme rekursioyhtälön funktiolle a, jonka voimme ratkaista helposti vaikkapa arvaamalla ja induktiolla. Toisaalta voimme ratkaista sen suoraan, sillä

$$a(2n) = a(0) \times \frac{a(2)}{a(0)} \times \cdots \times \frac{a(2n)}{a(2n-2)} = a(0)(2n)!!$$

Koksa $a(0) = \mathbf{E}\, X^0 = \mathbf{E}\, 1 = 1$, niin väitehän seuraa. Tämän avulla voimme nyt laskea tarkemman Hölderin eksponentin Brownin liikkeelle.

Oletetaan, että $t > s$. Koska $\mathbf{E}\, (B(t) - B(s))^{2n} = \mathbf{E}\, B(t-s)^{2n}$ ja $B(t-s) \sim \mathfrak{N}(0, t-s)$, niin $X := B(t-s)/\sqrt{t-s} \sim \mathfrak{N}(0,1)$. Siispä

$$\mathbf{E}\, (B(t) - B(s))^{2n} = \mathbf{E}\, X^{2n}\, (t-s)^n = a(2n)(t-s)^n$$

Kolmogorovin jatkuvuuslauseen $\alpha = 2n$ ja $\beta = n - 1$ sekä $\gamma = a(2n)$, joten saamme Hölderin eksponentiksi $\lambda < \beta/\alpha = \frac{1}{2} - 1/2n$. Kun $n \to \infty$, niin eksponentin voi kasvattaa aina lukuun $\lambda < \frac{1}{2}$ asti.

6. Näytä luentojen Lemma 2.15. eli SK-ketjuominaisuus yksinkertaiselle satunnaiskävelylle.

Koska $X_{n+1} - X_n = B_n$ jokaisella ajanhetkellä n joten tämän havainnon sekä riippumattomuuden avulla voimme laskea, että

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\,(\, X_{n+1} = j, X_k = i_k \text{ kun } k \le n\,) \\ &= \mathbf{P}\,(\, B_n = j - i_n, B_{n-k} = i_{k+1} - i_k \text{ kun } 1 \le k \le n\,) \\ &= \mathbf{P}\,(\, B_n = j - i_n\,)\, \mathbf{P}\,(\, B_{n-k} = i_{n-k+1} - i_{n-k} \text{ kun } 1 \le k \le n\,) \\ &= \mathbf{P}\,(\, B_n = j - i_n\,)\, \mathbf{P}\,(\, X_k = i_k \text{ kun } 0 \le k \le n\,) \end{aligned} \tag{0.1}$$

joten

$$\mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = j \,|\, X_k = i_k \text{ kun } k \leq n\,) = \mathbf{P}\,(\,B_n = j - i_n\,)$$

Toisaalta summaamalla yli tilojen $i_0, \ldots, i_{n-1}$ identiteetissä (0.1) havaitsemme, että

$$\mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = j, X_n = i_n\,) = \mathbf{P}\,(\,B_n = j - i_n\,)\,\mathbf{P}\,(\,X_n = i_n\,)$$

Siispä

$$\mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = j \,|\, X_n = i_n\,) = \mathbf{P}\,(\,B_n = j - i_n\,) = \mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = j \,|\, X_k = i_k \text{ kun } k \leq n\,)\,.$$

Aikastationaarisuus seuraa myös tästä, sillä

$$\mathbf{P}\,(\,B_n = j - i\,) = \tfrac{1}{2}[\,j - i = \pm 1\,].$$

Siispä

$$\mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\,) = \mathbf{P}\,(\,X_{m+1} = j \,|\, X_m = i\,) = \tfrac{1}{2}[\,j - i = \pm 1\,] = p_{ij}$$

ja ketju on aikastationaarinen. Koska $p_{ij} = 0$ kun $|j - i| \geq 2$, niin se on myös SK-ketju.