Rahoitusteorian kokeen malliratkaisut, 25.03.2010 ,
(Dario Gasbarran kirjoittamia)

Yhden perioodin markkina-malleista

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon satunnaismuuttuja $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$. Siis

$$P(\{\omega : a < U(\omega) \leq b\}) = (b-a) \text{ kun } 0 \leq a \leq b \leq 1 \, .$$

Yhden perioodin markkinamallissa on kaksi instrumenttia:
riskiton pankkitili B jolla

$$B_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } B_1(\omega) = 6/5 \text{ kun } t = 1.$$

ja osake S jolla

$$S_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } S_1(\omega) = \big(1/2 + U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1.$$

1. Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa mutta ei ole täydellinen. Esitä kaksi erilaista riskineutraalimittaa.

   R. Koska

   $$P\left(\frac{S_1(\omega)}{S_0} > \frac{B_1}{B_0}\right) = 3/10 > 0$$
   $$P\left(\frac{S_1(\omega)}{S_0} < \frac{B_1}{B_0}\right) = 7/10 > 0$$

   seuraa että malli on arbitraasi vapaa.

   Eqvivalentti-riski neutraali mitta vastaa tiheysfunktio $q(u) \geq 0$ jolla

   $$\int_0^1 q(u)du = 1 \qquad \int_0^1 uq(u)du = 6/5 - 1/2 = 7/10 \tag{1}$$

   Riski-neutraali mittojen joukon on tässä tapauksessa ääretönulotteinen.

   Mitta Q jolla $Q(U \in du) = q(u)du$ jossa $q(u) = (au^2 + b), a = 12/5$ $b = 1/5$ (arvot saatu ratkaisemalla (2)) on riskineutraali ja eqvivalentti alkuperäisen P:n kanssa.

   Toinen eqvivalentti-riskineutraali mitta on $\widetilde{Q}$ jolla $\widetilde{Q}(U \in du) = \widetilde{q}(u)du$ jossa $\widetilde{q}(u) = (\widetilde{a}u^3 + \widetilde{b}), \widetilde{a} = 8/3$ $\widetilde{b} = 1/3$.

2. Olkoon satunnaismuuttuja

   $$G(\omega) = \big(\beta B_1(\omega) + \gamma S_1(\omega)\big) \in \mathcal{F}$$

   jossa $\beta = -1, \ \gamma = +1$. Laske option $G(\omega)$ arbitraasivapaa-hintojen joukko.

   R. Selvästi portfolio jossa on hetkellä $t = 0$ β pankkitilisijoituksia ja γ osakkeita toistaa option hetkellä $t = 1$, ja siksi tämän option hinta on yksikäsitteinen, $c = \beta B_0 + \gamma S_0 = 0$.

   Huomataan että $P(G(\omega) < 0) > 0$, oikeanoppisesti sitä pitäisi kutsua futuuriksi *(eng. future)* eikä optioksi.

3. Olkoon optio $F(\omega) = U(\omega)^2$.

   Laske option F arbitraasivapaa hintojen joukko $\mathcal{C}(F)$.

   Vihje: tutki vektorin $(S_1/B_1, F/B_1)$ jakauman kantajan konveksipeittoa, joka sisältää $(S_0/B_0, c(F)/B_0)$ silloin kun $c(F)$ on arbitraasivapaa hinta optiolle F.

   R. Kun $u \in [0,1]$,

$$S_1/B_1 = x = (1/2 + U)5/6 \in (5/12, 15/12),$$
$$\text{ja } F/B_1 = y = U^2 5/6 = (6/5x - 1/2)^2 5/6 = 6/5x^2 - x + 5/24.$$

Satunnaisvektorin $(S_1/B_1, F/B_1)$ jakauman kantaja on konveksi käyrän pätkä

$$K := \big\{(x,y) : x \in (5/12, 15/12) \text{ ja } y = 6/5x^2 - x + 5/24.$$

K joukon konveksipeiton sisus on joukko

$$\widetilde{K} = \big\{(x,y) : x \in (5/12, 15/12) \text{ ja } 6/5x^2 - x + 5/24. < y < (x - 5/12)\big\}$$

Hinta-systeemi on arbitraasi vapaa jos ja vain jos $(S_0/B_0, c(F)/B_0) \in \widetilde{K}$, ja koska $S_0 = B_0 = 1$, sijoittamalla $x = 1$ seuraa että option F option arbitraasivapaiden hintojen joukko on $(1/5+5/24, 7/12) = (49/120, 7/12)$.

Vaihtoehtoisesti voidaan tutkia diskontatun option odotusarvon eri riskineutraalimittojen suhteen, huomamaalla että

$$E_Q(U^2) = E_Q(U)^2 + Var_Q(U),$$

jossa $E_Q(U)$ ei riipu riskineutraalimitan valinnasta. Tästä seuraa että $E_Q(U^2)$ maksimoidaan (minimoidaan) maskimoimalla (minimoimalla) $Var_Q(U)$ riskineutraalimitan Q:n suhteen.

Esitämme varianssin minimoiva ja maksimoiva riski neutraali mitat. Olkoon $\delta_x(du)$ pistemassa pisteessa x.

$$\underline{Q}(U \in du) = \delta_{7/10}(du)$$

on riksi neutraali ja minimoi varianssia

$$\overline{Q}(U \in du) = 3/10\delta_0 + 7/10\delta_1(du)$$

on riski-neutraali ja maksimoi varianssia, mutta molemmat ovat singulaarisia alkuperäisen P:n kanssa.

On kuitenkin selvää että siloittamalla sopivasti näitä singulaarisia mittoja voidaan rakentaa riskineutraali mittojen jonot $\overline{Q}^n$ ja $\underline{Q}_n$ jotka ovat eqvivalentteja alkuperäisen P mitan kanssa ja

$$\text{Var}_{\overline{Q}^n}(U) \uparrow \text{Var}_{\overline{Q}}(U) = 7/10$$
$$\text{Var}_{\underline{Q}^n}(U) \downarrow \text{Var}_{\underline{Q}}(U) = 0$$

Siksi option $F(\omega) = U^2(\omega)$ arbitraasi vapaiden hintojen joukko on

$$\Big(E_{\underline{Q}}(U^2/B_1), E_{\overline{Q}}(U^2/B_1)\Big)\big((7/10)^2 \times 5/6, 7/10 \times 5/6\big) = \big(49/120, 7/12)$$

Oleta nyt että optio $F(\omega) = U(\omega)^2$ kaupataan markinoilla hektellä $t = 0$ arbitraasivapaalla markkinahinalla $c(F) \in \mathcal{C}(F)$

Esimerkiksi voidaan sopia että $c(F) = \frac{1}{2}(c^-(F) + c^+(F))$ jossa $\mathcal{C}(F) = (c^-(F), c^+(F))$.

Tarkastellaan laajennettua markkinamallia $(B, S, F; \pi_0, \pi_1, c(F))$.

4. Osoita että laajennettu markkinamalli on arbitraasivapaa.

   Siis oletamme että option kauppahinta on esimerkiksi $c(F) = 119/240 = 0.4958$ joka on arbitraasivapaa.

   Laajennetun markkinamallin arbitraasivapaus seuraa suoraan arbitraasivapaa hinnan määritelmästä. Riksi neutraali mittojen joukko koostu kaikista Q mitoista jolla $Q(U \in du) = q(u)du$ jossa $q(u) \geq 0$ kun $u \in [0, 1]$, ja täyttää ehdot

   $$\int_0^1 q(u)du = 1 \qquad \int_0^1 uq(u)du = 7/10 \qquad \int_0^1 u^2 q(u)du = 119/240$$

   Esimerksiksi voitaisin etsiä $q(x)$ polynomiaaliset tai paloittainvakio tiheysfunktiot.

   Malli on vielä epätäydellinen koska edelleen riski neutraalimittojen joukko on ääretönulotteinen ja on käytössä väin kolme rajoitus instrumentteja (B, S, F).

5. Olkoon optio $X(\omega) = S_1(\omega)^2 = (U(\omega) - 1/2)^2$. Osoita että tämä optio on toistettavissa laajennetussa markkinamallissa $(B_1, S_1, F; B_0, S_0, c(F))$, laske sen yksikäsitteinen hinta ja suojaus-strategia.

   Kirjoitamme

   $$X = U^2 + 1/4 + U = F + 1/4 + S_1 - 1/2 = F + S_1 - \frac{1}{4} = F + S_1 - \frac{5}{6}\frac{1}{4}B_1 \quad (2)$$

   Selvästi tämä sopimus on toistettavissa laajennetussa markkinamallissa, jolla on yksikäsitteinen hinta

   $$c(X) = c(F) + S_0 - 5/24 B_0 = 119/240 + 1 - 5/24 = 309/240 = 1.2875 \quad (3)$$

Osa II: Black ja Sholesin malli

Käsittelemme yksinkertaistettu jatkuva-aikainen Black ja Scholes markkina malli, jossa on sijoitusinstrumenttit (B_t) ja (S_t), (pankkitili sijoitus ja osakesijoitus) jossa

$$dS_t = S_t \sigma dW_t, \quad S_0 > 0$$
$$B_t = B_0 = 1, \quad (\text{ pankkitilin korko on } 0)$$

jossa W_t on Brownin liike todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ja $\sigma \neq 0$ on deterministinen vakio.

Siis, S_t on stokastisen differentiaali yhtälön ratkaisu

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u \sigma dW_u$$

jossa esintyy Ito integraali.

6. Näytä Iton kaavan avulla että

$$S_t = S_0 \exp\bigl(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\bigr) = f(W_t, t)$$

jossa $f(x,t) = S_0 \exp\bigl(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\bigr)$

R.

$$dS_t = \frac{\partial}{\partial x} f(W_t, t) dW_t + \frac{\partial}{\partial t} f(W_t, t) dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(W_t, t) dt =$$
$$f(W_t, t)\Bigl(\sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \frac{1}{2}\sigma^2 dt\Bigr) = S_t \sigma dW_t$$

7. Näytä että S_t on P martingaali Brownin liikkeen filtraatiossa $(\mathcal{F}_t^W)$, josta seuraa että P on riski-neutraali.

Vihje: muistakaa että

$$E(\exp(\theta X)) = \exp\bigl(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\bigr)$$

gaussiselle satunnaismuuttujalle $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

R. Kun $0 \leq r \leq t$

$$E_P\bigl(S_t \big| \mathcal{F}_r\bigr) = E_P\bigl(\frac{S_t}{S_r}\big|\mathcal{F}_r\bigr) S_r =$$
$$E_P\bigl(\exp(\sigma(W_t - W_r) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-r)\big|\mathcal{F}_r\bigr) S_r$$
$$= S_r E_P(\exp(\sigma(W_t - W_r))) \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2(t-r)) = S_t$$

Koska $(W_t - W_r)$ on gaussinen odotusarvolla nolla ja varianssilla $(t-r)$, riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_r$.

8. Käsitellään europpalainen osto-optio

$$G(\omega) = W_T(\omega) = \sigma^{-1}\Bigl(\log\bigl(S_T/S_0\bigr) + \frac{1}{2}\sigma^2 T\Bigr)$$

Ito-Clark martingaali esityslauseen ja Iton kaavan avulla, etsi suojaus strategiaa ja hintaa osto-optiolle G:lle.

Vihje: Muistakaa Ito Clarck esityslause:

jos $G \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, P)$ jossa $\mathcal{F}_T^W = \sigma(W_s : s \in [0,T])$, seuraa että on olemassa $H_s(\omega)$ adaptoitu Brownin liikkeen filtratiossa, jolle

$$\int_0^T E_P(H_s^2) ds < \infty$$

ja ennustus-martingaalilla on muotoa

$$E_P(F|\mathcal{F}_t^W) = E_P(F) + \int_0^T H_s dW_s$$

R.

$$W_T = W_0 + \int_0^T dW_r = 0 + \int_0^T (\sigma S_r)^{-1} dS_r$$

eli itserahoittava strategia jolla on alkupääoma $V_0 = 0$ ja jolla hetkellä $0 \le r \le T$ pidetään $\gamma_t = (\sigma S_t)^{-1}$ osakkeita ja $\beta_t = (V_t - \gamma_t S_t) = (V_t - \sigma^{-1})$ euroa pankkitilillä toistaa kyseisen option.