

# Introduktion till diskret matematik

Övning 5, vecka 50

Förslag till lösningar

Sebastian Björkqvist

1. 12 spelare deltar, alla spelar två gånger mot alla.

Om vi vet att första spelaren spelar mot elva andra, andra spelaren mot tio, tredje mot nio osv. Eftersom alla spelare två gånger mot varann multiplicerar vi summan med två:

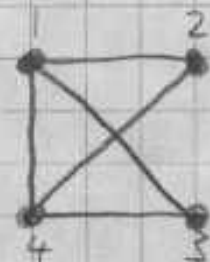
$$2 \cdot (11 + 10 + \dots + 2 + 1) = 2 \cdot \frac{11(11+1)}{2} = 11 \cdot 12 = 132.$$

Det spelas alltså 132 omgångar schack under turneringen.

2. Ge ett exempel på en graf som

a) är isomorf med den givna grafen

b) inte är isomorf med den givna grafen



Lösning a) Grafen själv är naturligtvis isomorf med sig själv. Ett annat exempel:

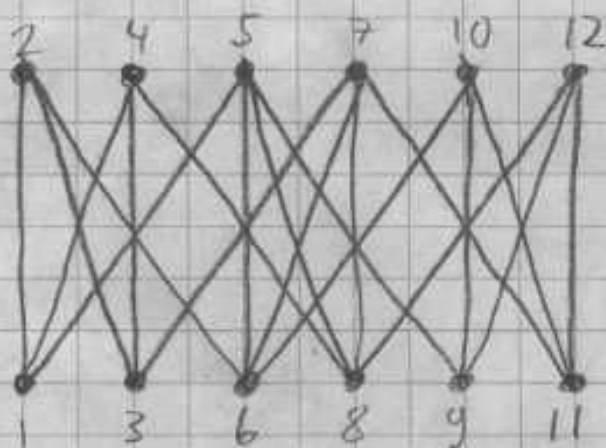
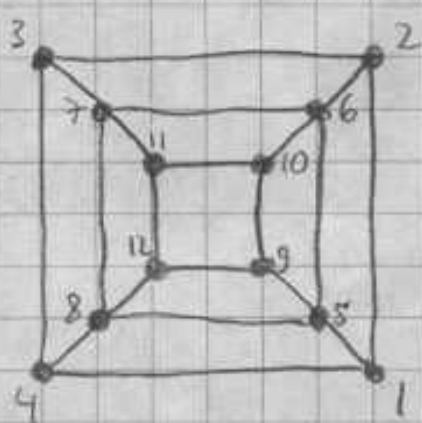


b) Vilken graf som helst som inte har fyra noder och fem kanter är inte isomorf med den givna grafen.

Ett exempel är den tomma grafen. Ett annat exempel:



3. Visa att följande grafer är isomorfa:



Lös. Vi bildar en bijektion i vilken punkt

$i \in \{1, 2, \dots, 12\}$  i vänstra grafen avbildas till punkt  $i$

i högra grafen. Då ser vi att det finns en kant

mellan punkterna  $i$  och  $j$  i vänstra grafen om

och endast om samma gäller för den högra grafen.

Alltså har vi hittat en isomorfism mellan graferna.

4. a) Rita en graf  $G$  som är sammanhängande men sådan att om en godtycklig kant tas bort är den inte längre sammanhängande.

b) Rita en graf  $G$  som är sammanhängande och sådan att den fortfarande är sammanhängande fast en godtycklig kant tas bort.

Lösning a) Exempel:



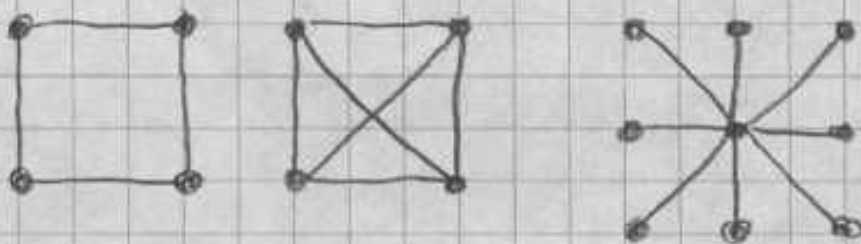
b) Exempel:



5. a) Rita en graf  $G=(V,E)$  vars kantmängd  $|E| \geq 4$  och där avståndet mellan två godtyckliga noder är högst två.

b) Rita en graf  $G=(V,E)$  vars kantmängd  $|E| \geq 3$  och där varje nod har udda grad.

5. Lös a) Exempel:



b) Exempel:



6. En Eulercykel hittas i graf 16 och 19, medan en Hamiltoncykel hittas i graferna 16, 17, 19, 21.

En Eulercykel hittas i en sammanhängande graf om och endast om varje nod har jämn grad. Det finns i allmänna fall inget enkelt sätt att bestämma om en graf har en Hamiltoncykel eller inte.

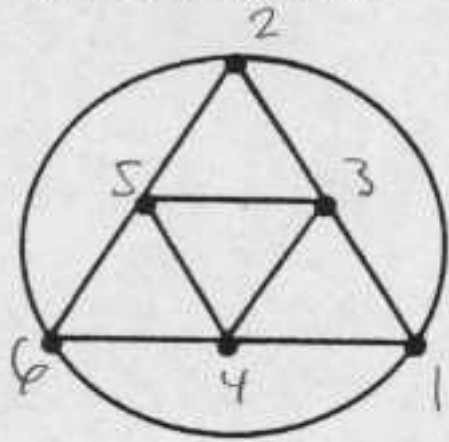
Eulercyklarna: 16 : (1, 2, 6, 1, 3, 2, 5, 6, 5, 3, 4, 1)

19 : (1, 2, 3, 1, 4, 2, 7, 8, 5, 7, 6, 5, 4, 3, 6, 8, 1)

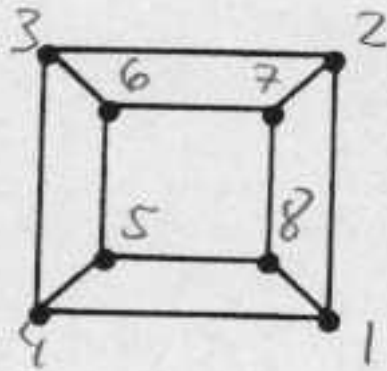
Hamiltoncyklarna fås i graferna 16, 17, 19 och 21 på

följande sätt:  $(1, 2, 3, \dots, n, 1)$ , där  $n=6, 8$  eller  $9$  beroende på grafen.

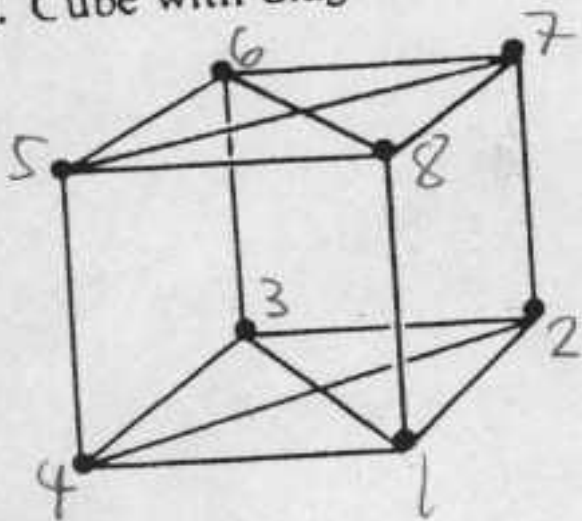
16. Octahedron



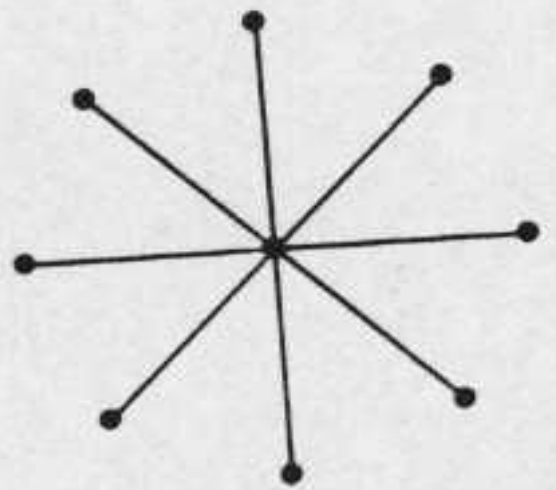
17. Cube



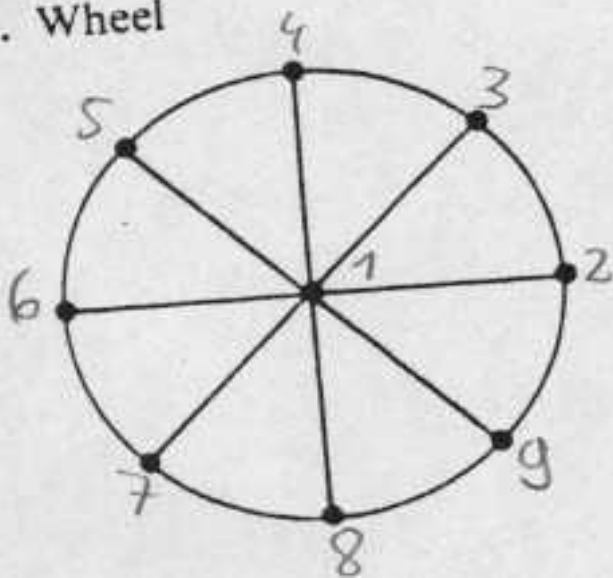
19. Cube with diagonals



20. Star



21. Wheel



22.!

