Introduktion till diskret matematik
Övning 4, vecka 49
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Ifall vi kunde skriva en lista över alla sätt att fylla rummen i hotellet, skulle det betyda att det finns numrerbart oändligt många sätt vi kan göra det på. Detta gäller dock inte, utan det finns övernumrerbart många sätt att fylla rummen.

För att visa detta gör vi ett motantagande: Vi antar att vi kan skriva en lista över sätt att fylla rummen. Då kan vi skriva mängden av följderna som

$$A = \{x_i : i \in \mathbb{N}, x_i = a_{i,0} a_{i,1} a_{i,2} \ldots\},$$

där varje a_{ij} är 0 eller 1 och $a_{nj} \neq a_{mj}$ för minst ett $j \in \mathbb{N}$, då $x_n \neq x_m$. Här är t.ex. $a_{5,2}$ rum 2 i hotell 5. Nu konstruerar vi följden y:

$$y = b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots, \text{ var } b_m = \begin{cases} 0, & \text{om } a_{m,m} = 1 \\ 1, & \text{om } a_{m,m} = 0 \end{cases},$$

alltså talet b_m i följden y är olikt än talet $a_{m,m}$ i följden x_m. Nu är $y \neq x_m$ för alla m, alltså $y \notin A$, vilket är en motsägelse.

2. Induktionsbeviset är uppbyggt helt rätt, men det fungerar inte i fallet $n=2$: Vi antar att vi har en skock på två får varav ett är vitt och ett är svart. Om vi tar bort svarta fåret, är alla får i kvarvarande skocken tydligt av samma färg, eftersom det bara finns ett får kvar. Om vi nu lägger tillbaka svarta fåret och tar bort vita fåret, är igen alla får som lämnat kvar av samma färg. Detta visar dock inte att alla får i den ursprungliga skocken är av samma färg, och därför fungerar inte steget $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ då $n+1=2$.

3. Visa med induktion att $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ för alla naturliga tal $n \geq 1$.

Bevis: Basfall: $n=1$

$$1 \cdot 1! = 1 = 2-1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2! - 1 = (1+1)! - 1$$

Induktionsantagande: Vi antar att formeln gäller för något $k \in \mathbb{N}$, dvs. att

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Induktionssteg: Vi visar att formeln gäller för $n = k+1$:

$$\underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k!}_{(k+1)!-1 \text{ enl. ind. ant}} + (k+1) \cdot (k+1)!$$

$$\overset{\text{I.A.}}{=} (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)!$$

$$= (1 + (k+1))(k+1)! - 1 = (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1$$

$$= ((k+1)+1)! - 1.$$

Enligt induktionsprincipen gäller formeln för alla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

4. En förening har 25 medlemmar. På hur många sätt kan de välja a) en styrelse med 4 personer, b) en ordförande, viceordförande, sekreterare och kassör?

Lösning: a) $\binom{25}{4} = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{303600}{24} = 12560$

b) $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$.

I a)-fallet ville vi bara veta på hur många sätt man kan välja en grupp på 4 personer ur en grupp på 25 personer, medan i fall b) har det betydelse vilken person som väljs till vilken post.

5. Hur många olika ord kan man bilda ur ordet "MIMMI" ifall man inte nödvändigtvis behöver använda alla bokstäver?

<u>Lösning</u> Vi räknar först hur många ord av en viss längd vi kan skapa. Låt n vara längden på ordet och k antalet bokstäver I i ordet (man kunde lika väl göra uträkningen med att se på antalet M)

<u>$n=0$:</u> Det finns $\binom{0}{0}=1$ ord (det tomma ordet)

<u>$n=1$:</u> Det finns $\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2$ ord.

<u>$n=2$:</u> Det finns $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1+2+1=4$ ord.

<u>$n=3$:</u> Det finns $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=1+3+3=7$ ord.

Notera att vi högst kan använda två stycken I.

<u>$n=4$:</u> Det finns $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=4+6=10$ ord. Här måste vi använda minst ett I eftersom det bara finns tre M.

$\underline{n=5}$: Det finns $\binom{5}{2}=10$ ord. Här måste alla bokstäver användas.

Sammanlagt får vi $1+2+4+7+10+10=34$ ord.