Introduktion till diskret matematik
Övning 3, vecka 48
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Visa att funktionen $f: [-2,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x) = x^2+4x+5$

är en bijektion och bestäm dess invers f^{-1}. Rita f och f^{-1}.

Lösn. För att visa att f är bijektiv räcker det att hitta en funktion $g: [1,\infty) \to [-2,\infty)$ för vilken $g(f(x)) = x \quad \forall x \in [-2,\infty)$ och $f(g(y)) = y \quad \forall y \in [1,\infty)$. Då är g f:s invers.

För att hitta inversen löser vi nu ekvationen $y = f(x)$:

$y = f(x) \iff y = x^2+4x+5 \iff x^2+4x+5-y = 0$

$\iff x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-(5-y)} = -2 \pm \sqrt{4-5+y} = -2 \pm \sqrt{y-1}$

Vi vill att $x \geq -2$, alltså väljer vi $x = -2+\sqrt{y-1}$.

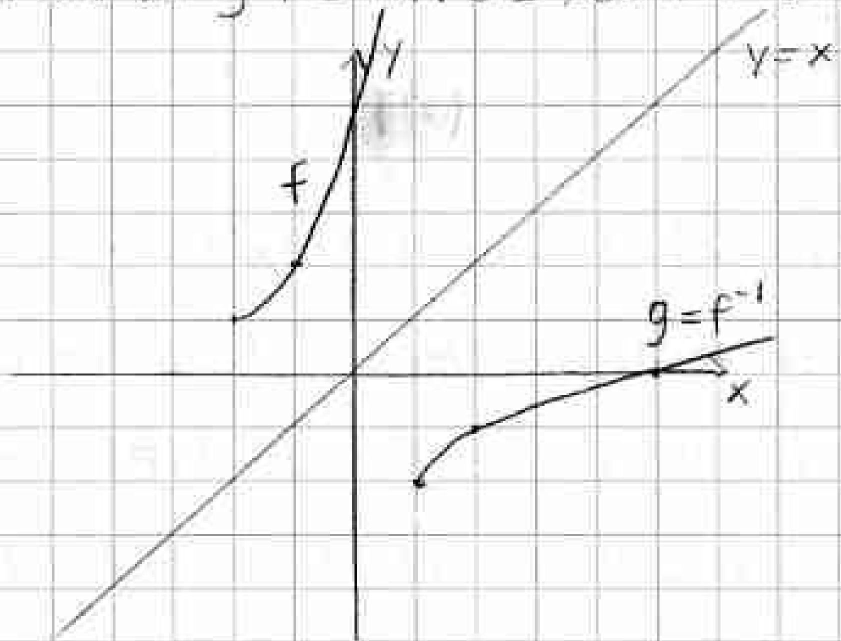
Nu definierar vi $g: [1,\infty) \to [-2,\infty)$, $g(y) = -2+\sqrt{y-1}$.

g är definierad för alla $y \in [1,\infty)$ och $g(y) \geq -2 \quad \forall y \in [1,\infty)$, så g:s definition är vettig. Eftersom $x = -2+\sqrt{y-1}$ löser ekvationen $y = f(x)$, gäller $y = f(g(y))$ för alla $y \in [1,\infty)$.

Om $x \in [-2,\infty)$, så gäller $g(f(x)) = -2+\sqrt{f(x)-1}$

$= -2+\sqrt{x^2+4x+5-1} = -2+\sqrt{x^2+4x+4} = -2+\sqrt{(x+2)^2} = -2+x+2 = x$.

Alltså är g f:s invers, och f är bijektiv.



Vi ser att f och dess invers f^{-1} är varandras speglingar i förhållande till linjen $y=x$.

2. Visa att $f: X \to Y$ är en injektion om och endast om
   $f^{-1}(f(A)) = A$ för alla $A \subset X$.

Bevis: "$\Rightarrow$" Antag att $f: X \to Y$ är injektiv, och låt $A \subset X$ vara given. Låt $x \in A$ vara given. Då gäller $f(x) \in f(A)$, och därmed $x \in f^{-1}(f(A))$. Därmed gäller $A \subset f^{-1}(f(A))$ (detta gäller för alla funktioner f). Låt nu $x \notin A$. Eftersom f är injektiv så gäller $f(x) \neq f(y)$ för alla $y \in A$, dvs. $f(x) \notin f(A)$, alltså $x \notin f^{-1}(f(A))$. Därmed gäller även $f^{-1}(f(A)) \subset A$, alltså $f^{-1}(f(A)) = A$.

"$\Leftarrow$" Antag att $f^{-1}(f(A)) = A \ \forall A \subset X$. Låt $x_1, x_2 \in X$ vara två godtyckliga punkter för vilka $f(x_1) = f(x_2)$. Då gäller $\{x_1\}, \{x_2\} \subset X$ och $f(\{x_1\}) = f(\{x_2\})$. Nu får vi $\{x_1\} \overset{\text{ant.}}{=} f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\})) \overset{\text{ant.}}{=} \{x_2\}$, dvs. $x_1 = x_2$.
Alltså är f injektiv. $\square$

3. Låt A och B vara ändliga mängder.
Visa att $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Bevis: Vi använder följande resultat i beviset (bevisade i Junnilas finska kompendium, s. 31-32):

i) Om A och B är ändliga och $A \cap B = \emptyset$, så gäller $|A \cup B| = |A| + |B|$

ii) Om $B \subset A$ och A är ändlig, så gäller $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

Vi noterar först att $A \cup B = A \cup B \setminus A$, och $A \cap B \setminus A = \emptyset$.
Det gäller även att $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, och $A \cap B \subset B$.
Då gäller $|A \cup B| = |A \cup B \setminus A| \overset{i)}{=} |A| + |B \setminus A| = |A| + |B \setminus (A \cap B)|$
$\overset{ii)}{=} |A| + |B| - |A \cap B|$. $\square$

4. <u>Lösn.</u> i) Ion the Quiet ryms i hotellet om alla gäster flyttar ett rum framåt, dvs. den som bor i rum 1 går till rum 2, gästen i rum 2 går till rum 3 osv. Alltså gästen som budde i rum n flyttar till rum $n+1$. Ion the Quiet tar rum 1.

ii) Vi numrerar hotellen 1, 2, 3, ..., och numrerar sedan primtalen: $2 = p(1)$, $3 = p(2)$, $5 = p(3)$ osv. Invånarna i hotell 1 tar rummen $p(1)^1, p(1)^2, p(1)^3, \ldots$, dvs rum $2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ Nästa hotells gäster tar rummen $p(2)^1, p(2)^2, \ldots$, och hotell n:s invånare går i rum $p(n)^1, p(n)^2, \ldots$. Eftersom det finns oändligt många primtal hittar vi ett rum åt alla gäster. Dessutom hamnar det aldrig två personer i samma rum, eftersom inga rumnummer har samma faktorer.

5. Visa att $1+2+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$ för alla $n \in \{0,1,2,\dots\}$

Bevis 1. Bassteg: Vi visar att formeln gäller för $n=0$:

$1 = 2-1 = 2^{0+1}-1$. Påståendet gäller för $n=0$.

2. Induktionsantagande: Vi antar att påståendet gäller för något $k \in \mathbb{N}$, dvs att $1+2+\dots+2^k = 2^{k+1}-1$.

3. Induktionssteg: Nu visar vi att påståendet gäller för $n=k+1$:

$$1+2^1+2^2+\dots+2^k+2^{k+1} = \underbrace{(1+2^1+\dots+2^k)}_{=2^{k+1}-1 \text{ enl. ind. ant.}}+2^{k+1} \overset{\text{indant}}{=} (2^{k+1}-1)+2^{k+1}$$

$$= 2(2^{k+1})-1 = 2^{k+2}-1 = 2^{(k+1)+1}-1.$$

Enligt induktionsprincipen gäller formeln för $n \in \{0,1,2,\dots\}$. $\square$

6. Visa att $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ för alla $n \in \{1,2,3,\dots\}$

Bevis. Vi betecknar $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2$.

1. Bassteg: Vi visar att formeln gäller för $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1).$$

Påståendet gäller för $n=1$.

2. Induktionsantagande: Vi antar att formeln gäller för något $n_0 \in \mathbb{N}$, dvs. att $\sum_{k=1}^{n_0} k^2 = \frac{1}{6}n_0(n_0+1)(2n_0+1)$.

3. Induktionssteg: Vi visar att formeln gäller för $n=n_0+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n_0+1} k^2 = \underbrace{1^2+2^2+\dots+n_0^2}_{=\frac{1}{6}n_0(n_0+1)(2n_0+1) \text{ enl. ind. ant}} + (n_0+1)^2 \overset{\text{ind. ant.}}{=} \frac{1}{6}n_0(n_0+1)(2n_0+1)+(n_0+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n_0^2+n_0)(2n_0+1)+n_0^2+2n_0+1^2$$

$$= \frac{1}{6}(2n_0^3+n_0^2+2n_0^2+n_0)+n_0^2+2n_0+1$$

$$= \frac{1}{6}(2n_0^3+3n_0^2+n_0+6n_0^2+12n_0+6)$$

$$= \frac{1}{6}(2n_0^3+9n_0^2+13n_0+6) \qquad (1)$$

Vi ser även att $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}(n_0+1)(n_0+2)(2(n_0+1)+1)$

$$= \frac{1}{6}(n_0^2+3n_0+2)(2n_0+3) = \frac{1}{6}(2n_0^3+9n_0^2+13n_0+6) \qquad (2)$$

Genom att kombinera (1) och (2) får vi

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1).$$

Enligt induktionsprincipen gäller formeln för alla $n \in \{1,2,3,\dots\}$