Introduktion till diskret matematik
Övning 2, vecka 47
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Visa att det för mängder $A, B \subset X$ gäller

a) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ och b) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

Bevis: a) $x \in \complement(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \complement A \wedge x \in \complement B \Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B$

b) $x \in \complement(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \complement A \vee x \in \complement B \Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B$. $\square$

2. Visa, att

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ och

b) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = ((A \setminus B) \times C) \cap (A \times (C \setminus D))$

Bevis: a) $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D)$

$\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \wedge ((x, y) \in B \times D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$.

b) $(x, y) \in (A \setminus B) \times (C \setminus D) \Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge y \in C \setminus D$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (y \in C \wedge y \notin D)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C) \wedge (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin D)$

$\Leftrightarrow (x \in A \setminus B \wedge y \in C) \wedge (x \in A \wedge y \in C \setminus D)$

2b) $\Leftrightarrow (x \in A \setminus B \wedge y \in C) \wedge (x \in A \wedge y \in C \setminus D)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in ((A \setminus B) \times C) \wedge (x,y) \in (A \times (C \setminus D))$

$\Leftrightarrow (x,y) \in ((A \setminus B) \times C \cap (A \times (C \setminus D)).$ $\square$

3. Låt $R \subset X \times Y$ och $A, B \subset X$. Visa att

a) $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$ och

b) $R(A \setminus B) \supset R(A) \setminus R(B)$

Bevis: a) Låt $y \in R(A \cup B)$ vara given. Då existerar ett $x \in A \cup B$ för vilket $(x,y) \in R$. Om nu $x \in A$ så gäller $y \in R(A)$, medan om $x \in B$ så gäller $y \in R(B)$, dvs $y \in R(A) \cup R(B)$.

Låt nu $y \in R(A) \cup R(B)$ vara given. Om $y \in R(A)$ så existerar ett $x \in A$ så att $(x,y) \in R$, och om $y \in R(B)$ så $\exists$ $x \in B$ så att $(x,y) \in R$. Alltså existerar det ett $x \in A \cup B$ för vilket $(x,y) \in R$. Därmed gäller $y \in R(A \cup B)$.

b) Låt $y \in R(A) \setminus R(B)$ vara given. Då gäller $y \in R(A)$ och $y \notin R(B)$. Då existerar ett $a \in A$ för vilket $(a,y) \in R$.

Eftersom $y \notin R(B)$, så gäller $a \notin B$, dvs. $a \in A \setminus B$. Därmed gäller $y \in R(A \setminus B)$. $\square$

4. Låt $X = \{1,2\}$. Bestäm alla funktioner $f: X \to X$.

<u>Lösn.</u> 1: $f(1) = f(2) = 1$ 2: $f(1) = f(2) = 2$

3: $f(1) = 1, f(2) = 2$ 4: $f(2) = 1, f(1) = 2$

5. Låt $f: X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$ och $B_1, B_2 \subset Y$. Visa att

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

c) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$.

<u>Bevis:</u> <u>a)</u> $f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow \{f(x) : x \in A_1 \cup A_2\} = \{f(x) : x \in A_1 \vee x \in A_2\}$

$= \{f(x) : x \in A_1\} \cup \{f(x) : x \in A_2\} = f(A_1) \cup f(A_2)$

<u>b)</u> $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = \{x \in X : f(x) \in B_1 \cup B_2\} = \{x \in X : f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2\}$

$= \{x \in X : f(x) \in B_1\} \cup \{x \in X : f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

<u>c)</u> Låt $y \in f(f^{-1}(B_1))$ vara given. Då existerar ett $x \in f^{-1}(B_1)$ för vilket $f(x) = y$. Därmed måste $y = f(x) \in B_1$, alltså $f^{-1}(f(B_1)) \subset B_1$. $\square$

Ett exempel på när $f(f^{-1}(B_1)) \subsetneq B_1$ är $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Nu om $B_1 = [0,1]$ så gäller $f(f^{-1}([0,1])) = f(\mathbb{R}) = 1 \subset [0,1]$.

(Notera att f <u>ej</u> är en surjektion)

6. Är följande funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiva, surjektiva eller bijektiva:

a) $f(x)=x$ b) $f(x)=x^2$ c) $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$

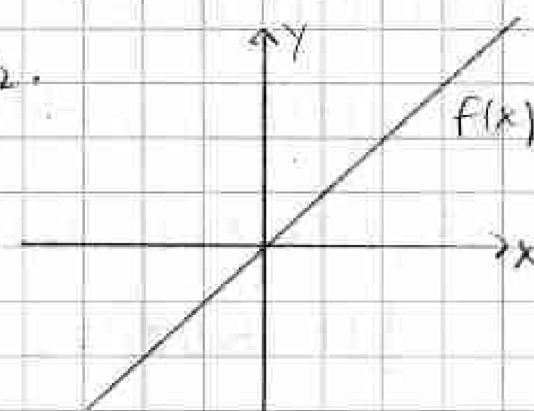
d) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{om } x \geq 0 \\ x, & \text{om } x < 0 \end{cases}$

Lösn. a) $f(x)=x$

f är surjektiv: Om $y \in \mathbb{R}$ så gäller det för $y \in \mathbb{R}$ att $f(y)=y$

f är injektiv: Om $f(x_1)=f(x_2)$ så $x_1=x_2$.

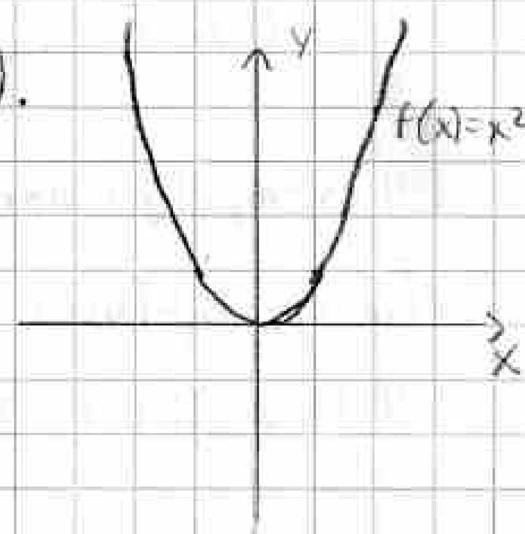
Alltså är f bijektiv.



b) $f(x)=x^2$

f är ej surjektiv: $x^2 \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, d.v.s. det existerar inget $x \in \mathbb{R}$ så att $f(x)=-1$.

f är ej injektiv: $f(2)=2^2=4=(-2)^2=f(-2)$.

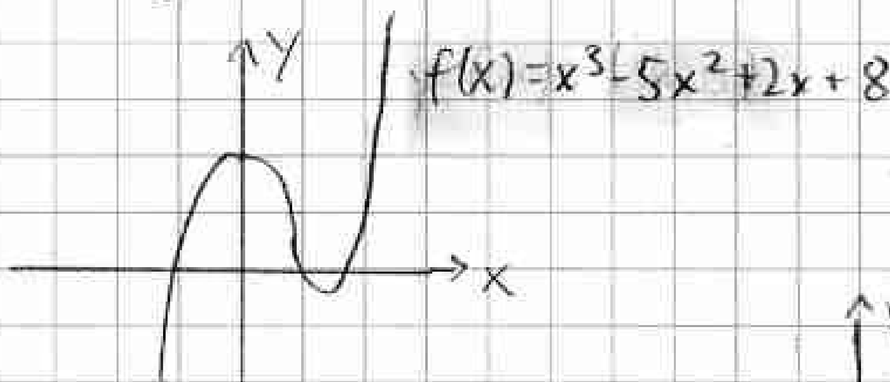


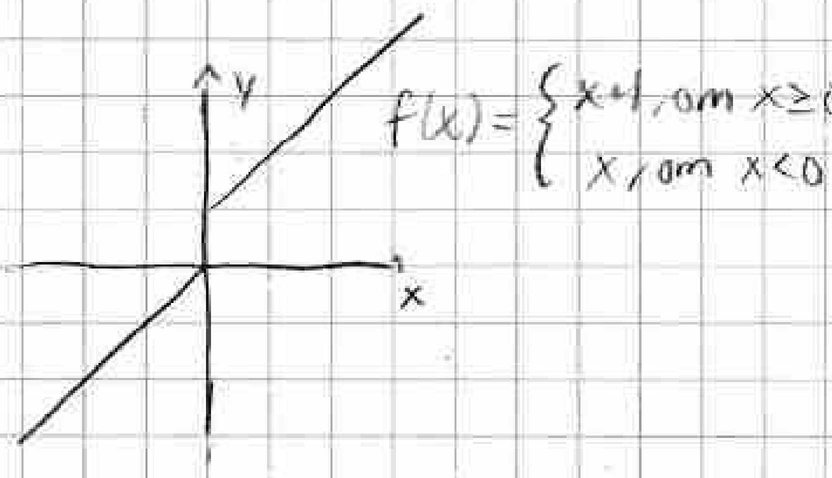
6c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

f är ej injektiv: $f(2) = 2^3 - 5\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 8 = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$

$$f(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$$

f är surjektiv: Egentligen borde vi visa att det för alla $y \in Y$ går att lösa ekvationen $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = y$, vilket inte är lätt. Vi kan motivera surjektiviteten t.ex. genom att se att f växer obegränsat åt båda hållen och är kontinuerlig.





d) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{om } x \geq 0 \\ x, & \text{om } x < 0 \end{cases}$

f är injektiv: Om $f(x_1) = f(x_2)$ så gäller $x_1 + 1 = x_2 + 1$, alltså $x_1 = x_2$ om $f(x_1) = f(x_2) \geq 0$. Om $f(x_1) = f(x_2) < 0$ så gäller direkt $x_1 = x_2$.

f är ej surjektiv: Det existerar inget $x \in \mathbb{R}$ för vilket $f(x) = \frac{1}{2}$.