Introduktion till diskret matematik
Övning 1, vecka 46
Förslag till Lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Låt $A = \{1, 2, \{3\}\}$. Bestäm $\mathcal{P}(A)$.

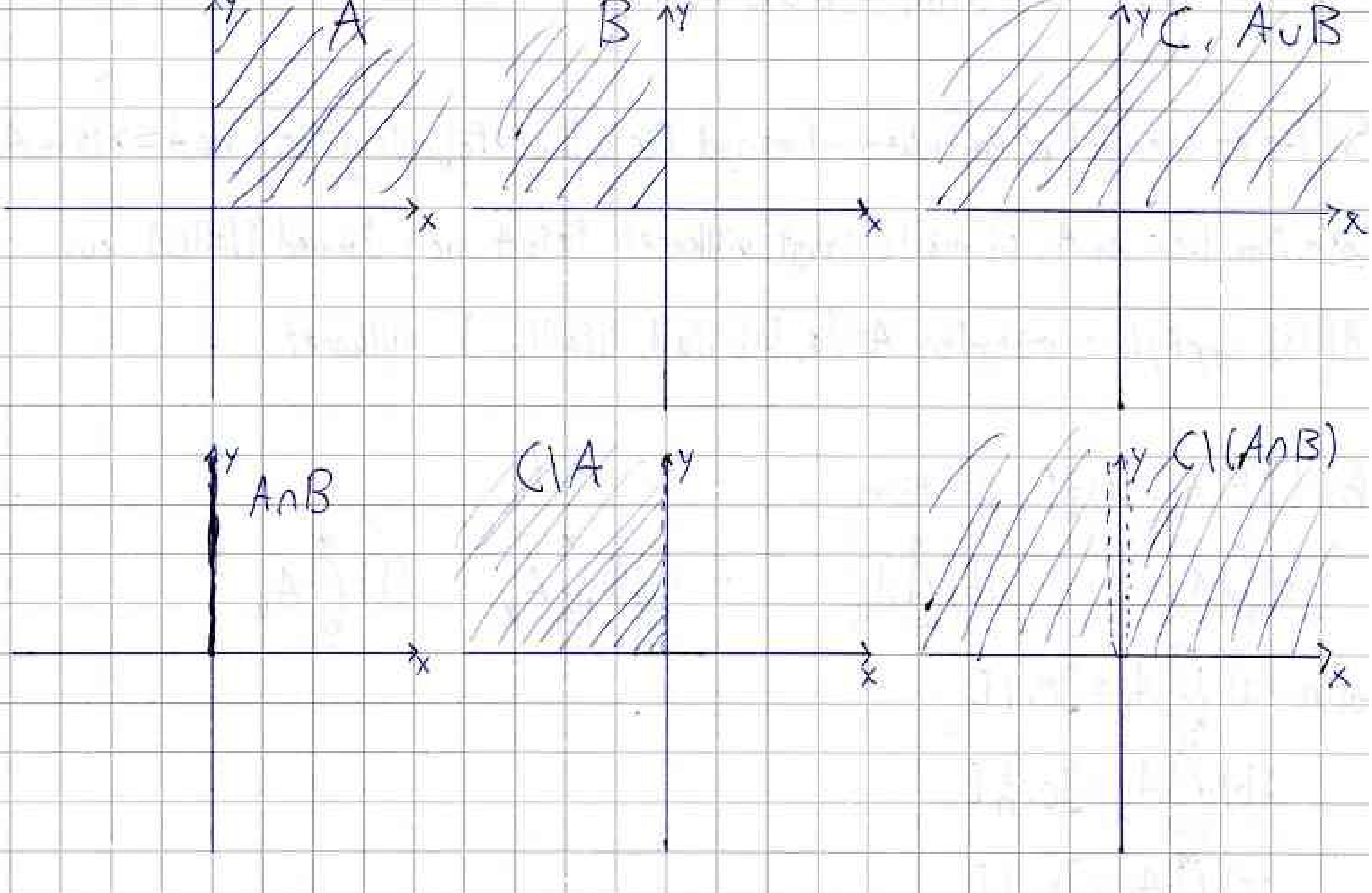
Lösn: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{3\}\}, \{1,2\}, \{1,\{3\}\}, \{2,\{3\}\}, \{1,2,\{3\}\}\}$

2. Låt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$ och

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Bestäm $A \cup B$, $A \cap B$, $C \setminus A$ och $C \setminus (A \cap B)$

Lösn: $A \cup B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ $\quad A \cap B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0\}$

$C \setminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x < 0\}$ $\quad C \setminus (A \cap B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \geq 0\}$



3. Låt A, B och C vara mängder så att $A \in B$ och $B \in C$. Är det möjligt att $A \in C$?

Lösn. Ja, det är möjligt men ej nödvändigt. Låt t.ex. $A = \{a\}$ och $B = \{\{a\}\}$. Om nu $C = \{\{\{a\}\}, \{a\}\}$ så gäller $A \in B$, $B \in C$ och $A \in C$. Om vi istället låter $C = \{\{\{a\}\}\}$ så gäller $A \in B$ och $B \in C$ men $A \notin C$.

4. Visa att $A \cup B = B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

Bevis. "$\Rightarrow$" $A \setminus B \overset{\text{ant.}}{=} A \setminus (A \cup B) \subset A \setminus A = \emptyset$.

"$\Leftarrow$" $A \cup B = B \cup (A \setminus B) \overset{\text{ant.}}{=} B \cup \emptyset = B$. $\square$

5. Ge ett exempel på en (icke-tom) mängd för vilket följande gäller: $x \in A \Rightarrow \{x\} \in A$.

Lösn. Om t.ex. $a \in A$, så måste enligt villkoret $\{a\} \in A$, och därmed $\{\{a\}\} \in A$ osv. Alltså uppfyller mängden $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \dots\}$ villkoret.

6. Låt $A_k =]0, \frac{1}{k}[$. Bestäm

(a) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ (b) $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ (c) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (d) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

Lösn. (a) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k =]0, 1[$

(b) $\bigcap_{k=1}^{n} A_k =]0, \frac{1}{n}[$

(c) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k =]0, 1[$

6 d) Påstående: $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$

<u>Bevis:</u> Vi gör ett motantagande: det existerar en punkt $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Därmed måste $x \in \left]0, \frac{1}{k}\right[$ för alla $k \in \mathbb{N}$, alltså $x > 0$. Vi väljer nu ett naturligt tal n_0 för vilket $\frac{1}{n_0} < x$. Då gäller $x \notin \left]0, \frac{1}{n_0}\right[$, och därmed $x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ⚡

Alltså $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$. □