Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus Diskreettiin Matematiikkaan
4. harjoitus viikolle 49
Petteri Harjulehto

1. Kertomus Hotelli Kosmoksesta jatkuu: Hotelliyhtymän johdolta tuli määräys laatia luettelo kaikista mahdollisista tavoista, joilla hotelliin voidaan sijoittaa vieraita. Täyttä huonetta tarkoittaa numero 1 ja tyhjää 0. Esimerkiksi $101010\ldots$ tarkoittaa, että paritonnumeroiset huoneet ovat varattuja ja parillisnumeroiset vapaita. Muutaman päivän ahkeran työn jälkeen hotellin johtaja tuli Ion the Quietin luo mukanaan pitkä lista. Ion väitti, että listalla ei voi olla kaikkia mahdollisia tapoja vieraiden sijoittamiseksi. Miten hän perusteli väitteensä?

2. Osoitetaan että kaikki lampaat ovat samanvärisiä. Tehdään tämä induktiolla lauman koon suhteen. On selvää että laumassa, jossa on vain yksi lammas, kaikki lampaat ovat samanvärisiä. Tehdään induktio-oletus: jokainen n-jäsenin lammaslauma on yksivärinen. Otetaan n+1 jäseninen lammaslauma. Induktio-oletuksen nojalla näiden muodostama n jäseninen lammaslauma on yksivärinen. Otetaan tästä laumasta yksi lammas ja vaihdetaan se ulkopuolelle jääneen lampaan kanssa. Näin saatu uusi n jäseninen lauma on induktio-oletuksen nojalla yksivärinen. Siis induktioperiaatteen nojalla kaikki n+1 lammasta ovat yksivärisiä. Olet luultavasti nähnyt valkoisen lampaan. Siis mustia lampaita ei ole olemassa.
Mikä tässä päättelyssä meni pieleen?

3. Osoita induktiolla, että

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

4. Eräässä kerhossa on 25 jäsenta. Kuinka monella tavalla voidaan valita (a) nelihenkinen johtokunta, (b) puheenjohtaja, varapuheenjohtaja, sihteeri ja rahastonhoitaja?

5. Kuinka monta erillaista sanaa voidaan muodostaa sanan "MIMMI" kirjaimista, jos kirjaimia voi myös jättää käyttämättä.

6. Todista Binomilause:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Vihje: induktio muuttujan n suhteen.

Institutionen för matematik och statistik
Introduktion till diskret matematik
Övningsblad 4, vecka 49
Niklas Brännström

1. Berättelsen om Hotellet Kosmos fortsätter: Hotellkoncernens ledning har gett order om att skapa en lista över alla möjliga sätt man kan placera gäster i hotellet. Ett fullt rum betecknas med siffran 1 och ett tomt med siffran 0. T.e.x. 101010... betyder att rum med udda nummer är upptagna medan rum med jämna nummer är lediga. Efter några dagars flitigt arbete förde hotelldirektören en lång lista till Ion the Quiet. Ion påstod att det på listan inte kan finnas alla möjliga sätt att placera gästerna. Hur motiverade han sitt påstående?

2. Hitta misstaget i följande resonemang och förklara varför det är ett misstag.

Vi bevisar med hjälp av induktion att alla får i en fårskock har samma färg. Det är självklart att alla får i en fårskock med bara ett får har samma färg. Detta är bassteget.
Induktionshypotesen är att i alla fårskockar med n får så har alla får samma färg.
Induktionssteg: Låt oss nu titta på en skock med $n+1$ får. Vi väljer ut ett får och ställer det åt sidan. Betrakta de kvarvarande djuren. Detta är en fårskock med n får, alltså har dessa samma färg enligt induktionshypotesen. Nu bevisar vi att fåret vi ställde åt sidan har samma färg som de övriga. Vi väljer ett annat får ur skocken och byter ut det mot fåret vi ställde åt sidan i början. Nu har vi återigen en fårskock med n får, alltså har de alla samma färg enligt induktionshypotesen. Det vill säga, fåret som vi ställde åt sidan i början har samma färg som de övriga fåren.
Slutsats: Enligt induktionsprincipen har alla får i världen samma färg.
Du har säkert sett vita får, alltså har vi visat att svarta får inte existerar.

3. Visa med hjälp av induktion att

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

för alla naturliga tal $n \geq 1$.

4. En förening har 25 medlemmar. På hur många sätt kan de välja (a) en styrelse med 4 personer, (b) en ordförande, vice ordförande, sekreterare och kassör?

5. Hur många olika ord kan man bilda ur ordet "MIMMI" om man inte nödvändigtvis måste använda alla bokstäver.

6. Lukastalen definieras rekursivt på följande sätt:

$$L_0 = 2, L_1 = 1 \text{ och } L_{n+2} - L_{n+1} - L_n = 0 \text{ för alla } n \geq 0.$$

a) Lös rekursionsekvationen, dvs. ge en formel för L_n. Ledning: Se föreläsningsanteckningarna på kurshemsidan (detta är en andra ordningens linjär homogen rekursionsekvation med konstanta koefficienter).

b) Bevisa med hjälp av induktion att

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \text{ för alla } n \geq 1,$$

där F_n är Fibonaccitalen. (Ledning: b) är fristående från a); nyttja bara definitionen av Lucastalen från a)).