

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus Diskreettiin Matematiikkaan
3. harjoitus viikolle 48
Petteri Harjulehto

1. Osoita, että kuvaus $f : [-2, \infty) \rightarrow [1, \infty)$,

$$f(x) = x^2 + 4x + 5,$$

on bijektio ja määritä sen käänteiskuvaus. Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat. Mitä yleinen ominaisuus kuvasta näkyy?

2. Osoita, että kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on injektio, jos ja vain jos $f^{-1}(f(A)) = A$ kaikilla $A \subset X$.

3. Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Osoita, että

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

4. Seuraava katkelma on mukaelma Stanislaw Leminin novellista "The Interstellar Milkman, Ion the Quiet", joka on ilmestynyt N.Ya. Vilenkinin kirjassa "Stories About Sets"(Academic Press, 1968).

Hotelli Kosmos sijaitsee jossakin tähtisumun ACD-1587 tienoilla. Tässä hotellissa on numeroituvasti ääretön määrä huoneita. Ion the Quit saapuu fotoniraketillaan Kosmoksen pihalle aikoen yöpyä hotellissa. Valitettavasti hotelli on täynnä, sillä parhaillaan on menossa universaali eläintieteilijäkongressi. Sen osaanottajat, joita on numeroituvasti ääretön määrä, ovat vallanneet hotellin. Miten hotellin neuvokas johtaja järjestää asian?

Aamulla vaikeudet jatkuvat. Jokaisessa linnunratajärjestelmässä, joita on kaikkiaan numeroituvasti ääretön määrä, on Kosmoksen kaltainen hotelli ja ne kaikki päätetään sulkea. Kaikki asukkaat kuljetetaan Kosmoksen pihalle. Miten hotellin johtaja saa majoitettua kaikki uudet asukkaat Kosmokseen?

5. Todista, että

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}(= \{0, 1, 2, 3, \dots\})$.

6. Todista, että

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+(= \{1, 2, 3, \dots\})$.

Institutionen för matematik och statistik
 Introduktion till diskret matematik
 Övningsblad 3, vecka 48
 Niklas Brännström

1. Visa att funktionen $f : [-2, \infty) \rightarrow [1, \infty)$,

$$f(x) = x^2 + 4x + 5,$$

är en bijektion och bestäm dess invers f^{-1} . Rita grafen av båda funktionerna f och f^{-1} i samma bild. Vilken allmän egenskap kan du se i bilden?

2. Visa att avbildningen $f : X \rightarrow Y$ är en injektion om och endast om $R_f^{-1}(f(A)) = A$ för alla $A \subset X$. Notationen R_f^{-1} betyder inversrelationen till funktionen f , och om $C \subset Y$ är

$$R_f^{-1}(C) := \{x \in X : f(x) \in C\}$$

urbilden av C .

3. Låt A och B vara ändliga mängder. Visa att

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

4. Följande avsnitt är en adaptation av Stanislaw Lemins novell "The Intertellar Milkman, Ion the Quiet", som även har publicerats i N.Ya. Vilens bok "Stories About Sets"(Academic Press, 1968).

Hotellet Kosmos befinner sig någonstans nära nebulosan ACD-1587. I detta hotell finns det numrerbart oändligt många rum. Ion the Quiet anländer till hotell Kosmos gård i sin fotonraket med avsikten att övernatta i hotellet. Tyvärr är hotellet fullt, eftersom samtidigt pågår det en universal zoologi-kongress. Dess deltagare, av vilka det finns numrerbart oändligt många, har bemannat hotellet. Hur löser den fiffiga hotelldirektören problemet?

På morgonen fortsätter svårigheterna. I varje galax, av vilka det finns numrerbart oändligt många, finns ett hotell likt Kosmos, och de alla stängs. Alla invånare transporteras till Kosmos gård. Hur kan hotelldirektören inkvartera alla de nya invånarna i Hotellet Kosmos?

5. Visa att

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

för alla $n \in \mathbb{N}(= \{0, 1, 2, 3, \dots\})$.

6. Visa att

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

för alla $n \in \mathbb{Z}_+(= \{1, 2, 3, \dots\})$.