Lösning uppgift 6 övningsblad 4.

a) Lucastalen är definierade genom

$$\begin{aligned} &L_0 = 2,\ L_1 = 1, \\ &L_{n+2} - L_{n+1} - L_n = 0, \end{aligned}$$

(notera att lucastalen är definierade av samma rekursionsekvation som Fibonaccitalen, men begynnelsevärdena är annorlunda). Detta är en andra ordningens linjär homogen rekursionsekvation av andra ordningen, därför löser vi rekursionsekvationen genom att studera dess karakteristiska ekvation, som i det här fallet är

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Vi löser den karakteristiska ekvationen och får:

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1},$$

dvs

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Den homogena lösningen (som i vårt fall är den allmänna lösningen (ty ekvationen är homogen så ingen partikulärlösning behövs)) är

$$L_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Konstanterna A och B bestäms genom att använda begynnelsevärdena, alltså A och B fås genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} L_0 = A + B = 2, \\ \\ L_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \end{cases}$$

det vill säga

$$A = 1, B = 1.$$

Alltså ges Lucastalen av

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) Visa att

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \tag{*}$$

för $n = \{1, 2, 3, \ldots\}$, där F_n är Fibonaccitalen som definieras som

$$\begin{aligned} &F_0 = 0,\ F_1 = 1,\\ &F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0. \end{aligned}$$

Bassteg: Betrakta fallen $n = 1$ och $n = 2$, vi ser att

$$L_1 = 1 = 0 + 1 = F_0 + F_2 = F_{1-1} + F_{1+1},$$

och

$$L_2 = 3 = 1 + 2 = F_1 + F_3 = F_{2-1} + F_{2+1},$$

så resultatet håller för $n = 1$ och $n = 2$.

Induktionshypotes: antag att (*) gäller för alla $n \in \{1, \ldots, k\}$.

Induktionssteg: Visa att (*) gäller för $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} \overset{\text{(Ind. Hyp)}}{=} F_{k-1} + F_{k+1} + F_{k-2} + F_k\\ &= (F_{k-1} + F_{k-2}) + (F_k + F_{k+1}) \overset{\text{Def. Fib.}}{=} F_k + F_{k+2}\\ &= F_{(k+1)-1} + F_{(k+1)+1}, \end{aligned}$$

alltså håller induktionssteget.

Slutsats: Enligt induktionsprincipen gäller (*) för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.