MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ratkaisuehdotuksia harjoitukseen 6
4.11.-6.11.2009
Thomas Vikberg

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{5}{7}$$

on tosi.
Ratkaisu: Tutkitaan ensin funktion arvon etäisyyttä luvusta $\frac{5}{7}$. Voidaan olettaa että $0<|x-2|<\delta<1$, jolloin epäyhtälölemman mukaan pätee $-1<x-2<1$ ja edelleen $1<x<3$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x+1}{3x+1}-\frac{5}{7}\right| &= \left|\frac{14x+7-(15x+5)}{21x+7}\right| = \left|\frac{-x+2}{21x+7}\right| \\ &= \left|(-1)\frac{x-2}{21x+7}\right| = \left|\frac{x-2}{21x+7}\right| < \left|\frac{x-2}{21+7}\right| < |x-2|\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon>0$. Valitaan $\delta=\min\{\frac{1}{2},\varepsilon\}$. Nyt

$$\left|\frac{2x+1}{3x+1}-\frac{5}{7}\right| < |x-2| < \delta \le \varepsilon$$

kun $0<|x-2|<\delta$.

2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{3}{7}$$

on epätosi.
Ratkaisu: Tutkitaan ensin funktion arvon etäisyyttä luvusta $\dfrac{3}{7}$. Voidaan olettaa että $0<|x-2|<\delta<1$, jolloin epäyhtälölemman mukaan pätee $-1<x-2<1$ ja edelleen $1<x<3$. Oletus voidaan tehdä sillä jos väite pätisi kun $\delta\ge 1$, niin se pätisi kun $0<\delta<1$. Kääntäen jos väite ei päde kun $0<\delta<1$, niin se ei päde kun $\delta\ge 1$.

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{3}{7}\right| = \left|\frac{7x+7-6x-3}{14x+7}\right| = \left|\frac{x+4}{14x+7}\right| = \frac{x+4}{14x+7} > \frac{x+1}{14x+14} = \frac{x+1}{14(x+1)} = \frac{1}{14}$$

Valitaan $\varepsilon = \dfrac{1}{14}$. Nyt

$$\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{3}{7}\right| > \varepsilon$$

kaikilla $\delta > 0$. Joten väite on epätosi.

3. Määritellään funktio $f\colon]0,3[\to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio f on derivoituva kohdassa $x = 2$ ja että $f'(2) = \frac{2}{9}$.
Ratkaisu: Lähdetään tutkimaan funktion erotusosamäärän ja luvun $\frac{2}{9}$ etäisyyttä kun $x = 2$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \frac{2}{9}\right| &= \left|\frac{\frac{2+h-1}{2+h+1} - \frac{2-1}{2+1}}{h} - \frac{2}{9}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{1+h}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} - \frac{2}{9}\right| = \left|\frac{\frac{3+3h-3-h}{9+3h}}{h} - \frac{2}{9}\right| \\
&= \left|\frac{2}{9+3h} - \frac{2}{9}\right| = \left|\frac{18-18-2h}{81+27h}\right|
\end{aligned}$$

voidaan olettaa, että $0 < |h-0| < \delta < 1$ jolloin epäyhtälölemman mukaan $-1 < h < 1$

$$\left|\frac{18-18-2h}{81+27h}\right| < \left|\frac{-2h}{54}\right| < |2h|$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Nyt

$$\left|\frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \frac{2}{9}\right| < |2h| < \varepsilon \text{ , kun } 0 < |h-0| < \delta.$$

Joten on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{2}{9}$$

eli funktio f on derivoituva kun $x = 2$ ja $f'(2) = \frac{2}{9}$.

4. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on derivoituva kohdassa $x = 4$ ja että $f'(4) = \frac{1}{4}$.
Ratkaisu: Tutkitaan erotusosamäärän ja luvun $\frac{1}{4}$ etäisyyttä kun $x = 4$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} - \frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}} - \frac{1}{4}\right| \\
&= \left|\frac{4-(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}{4(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}\right| = \left|\frac{-\sqrt{4+h}+\sqrt{4}}{4(\sqrt{4+h}+2)}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{4(\sqrt{4+h}+2)}\right| = \left|\frac{4+h-4}{4(\sqrt{4+h}+2)(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}\right| \\
&\leq \left|\frac{h}{4(0+2)(0+2)}\right| = \frac{|h|}{4(0+2)(0+2)} = \frac{|h|}{16} < |h|
\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon$. Nyt

$$\left|\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} - \frac{1}{4}\right| < |h| < \varepsilon \text{ , kun } 0 < |h-0| < \delta.$$

5. Oletetaan, että $h > 0$ ja funktio f on määritelty kaikilla $x \in]x_0 - h, x_0 + h[$ ja että $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, missä $b \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \neq x_0$ pätee: jos $|x - x_0| < \delta$, niin $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$. Vihje: voi auttaa, jos tarkastelet tapauksia $b < 0$ ja $b > 0$ erikseen.
Ratkaisu: Raja-arvon määritelmän mukaan pätee, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, s.e. $|f(x) - b| < \varepsilon$ kun $0 < |x - x_0| < \delta$. Käytettään vihjettä ja käydään läpi kaksi eri tapausta:

Tapaus 1, $b < 0$**:**
Nyt $\frac{-b}{2} > 0$ ja pätee erityisesti että

$$|f(x) - b| < \frac{-b}{2} \text{ , jollakin } \delta > 0.$$

Käytetään epäyhtälölemmaa ja saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{b}{2} &< f(x) - b < \frac{-b}{2} \\
\frac{b}{2} + b &< f(x) < \frac{-b}{2} + b \\
\frac{3}{2}b &< f(x) < \frac{1}{2}b
\end{aligned}$$

kerrotaan luvulla (-1) ja saadaan

$$\frac{3}{2}(-b) > -f(x) > \frac{1}{2}(-b)$$

josta seuraa että

$$\frac{3}{2}|b| > |f(x)| > \frac{1}{2}|b|$$

Tapaus 2, $b > 0$:
Nyt $\frac{b}{2} > 0$ ja pätee erityisesti että

$$|f(x) - b| < \frac{b}{2} \text{ , jollakin } \delta > 0.$$

Käytetään epäyhtälölemmaa ja saadaan

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2} &< f(x) - b < \frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} + b &< f(x) < \frac{b}{2} + b \\ \frac{1}{2}b &< f(x) < \frac{3}{2}b \end{aligned}$$

josta seuraa että

$$\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$$

6. Oletetaan, että funktio g toteuttaa kaikilla $x \in]-1, 1[$ epäyhtälön $|g(x)| < 7$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituva kohdassa $x = 0$ ja, että $f'(0) = 0$. Tutki rohkeasti erotusosamäärän etäisyyttä luvusta 0. (Huomaa, että voi esimerkiksi olla $g(x) = 0$ kun x on rationaalinen ja $g(x) = 1$ kun x irrationaalinen. Funktio voi olla siis derivoituva yhdessä kohdassa ja epäjatkuva kaikkialla muualla.)
Ratkaisu: Lähdetään rohkeasti tutkimaan erotusosamäärän ja luvun 0 etäisyyttä:

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(0+h) - f(0)}{h} - 0\right| = \left|\frac{(0+h)^2 g(0+h) - 0^2 g(0)}{h}\right| &= \left|\frac{h^2 g(h)}{h}\right| \\ &< \left|\frac{h^2 8}{h}\right| = |8h| \text{ , kun } h \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{8}\}$. Nyt

$$\left|\frac{f(0+h)-f(0)}{h} - 0\right| < |8h| \leq \varepsilon \text{ , kun } 0 < |h-0| < \delta.$$