MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 11
7. 12. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (7 sivua) (S.M)

Luennoilla on nyt menossa vaihe, missä Hurri-Syrjäsen monistetta käyttäen tutustutaan tärkeiden transkendenttifunktioiden perusominaisuuksiin.

Nämä ovat syksyn viimeiset laskuharjoitukset.

1. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla $x > 0$ pätee
(a) $\sinh x - \sin x > 0$;
(b) $\cos x - (2 - \cosh x) > 0$.

Ratkaisu. (a) Palautetaan ensin mieleen hyperbolisen sinin ja kosinin määritelmät $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ ja $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Olkoon $x > 0$. Määritellään funktio

$$f : [0, x] \to \mathbb{R},\ f(t) = \sinh t - \sin t.$$

Tällöin funktio f on välillä $[0, x]$ jatkuva ja avoimella välillä $]0, x[$ derivoituva, sillä funktiot $t \mapsto \sinh t$ ja $t \mapsto \sin t$ ovat sitä. Nyt saadaan $f'(t) = \cosh t - \cos t$, sillä $D \sinh t = \cosh t$. Koska tunnetusti pätee $\cosh t > 1 \geq \cos t$ kaikilla $t > 0$, niin on voimassa $f'(t) > 0$ jokaisella $t \in]0, x]$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa $\psi \in]0, x[$, jolle pätee

$$f(x) - f(0) = f'(\psi)(x - 0) = f'(\psi)x,$$

joten saadaan $f(x) = f'(\psi)x + f(0) = f'(\psi)x > 0$, sillä $f(0) = 0$. Koska $x > 0$ on mielivaltainen, niin on voimassa $\sinh x - \sin x > 0$ kaikilla $x > 0$.

(b) Olkoon $x > 0$. Määritellään funktio

$$g : [0, x] \to \mathbb{R},\ g(t) = \cos t + \cosh t - 2.$$

Tällöin funktio g toteuttaa väliarvolauseen vaatimukset. Nyt (a)-kohdan nojalla pätee $g'(t) = -\sin t + \sinh t > 0$ jokaisella $t \in]0, x[$. Väliarvolauseen perusteella on olemassa $\eta \in]0, x[$, jolle pätee

$$g(x) - g(0) = g'(\eta)(x - 0).$$

Koska on voimassa $g(0) = 0$ ja $g'(\eta) > 0$, niin saadaan

$$g(x) = g(0) + g'(\eta)x = g'(\eta)x > 0.$$

Koska $x > 0$ on mielivaltainen, niin on voimassa $\cos x + \cosh x - 2 > 0$ kaikilla $x > 0$.

2. Johda yhtälö

$$D\text{ar}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

kun $x > 1$. Tutki monisteen sivuja 84 ja 85!

Ratkaisu. Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty[$ rajoittumalla välille $]0, \infty[$ on olemassa käänteisfunktio ar cosh : $[1, \infty[\to]0, \infty[$ (vastaavasti funktion cosh rajoittumalla välille $] - \infty, 0[$ on olemassa käänteisfunktio $-$ar cosh.) Johdetaan ensin funktiolle ar cosh lauseke (tämä on tehty myös monisteen sivulla 84.) Merkitään $x = \cosh y$, missä $y \in]0, \infty[$, jolloin saadaan

$$x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \Leftrightarrow 2xe^y = (e^y)^2 + 1 \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0.$$

Ratkaisemalla tämä toisen asteen yhtälö muuttujan e^y suhteen saadaan

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

mistä edelleen $y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. Koska pätee $y \in]0, \infty[$, hylkäämme $(-)$merkin (ratkaisu $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ vastaa tilannetta $y = -$ar cosh x). Näin ollen on saatu $y =$ ar cosh x $= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Lopuksi laskemme derivaatan Dar cosh x käyttämällä ketjusääntöä (monisteen Lause 7.3). Siispä kaikilla $x > 1$ pätee

$$\begin{aligned}
D\text{ar cosh x} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\ D(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}(1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}2x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\
&\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2 - 1}(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.
\end{aligned}$$

3. Osoita, että $x^x = e^{x \ln x}$ on aidosti kasvava joukossa $[\frac{1}{e}, \infty[$.

Ratkaisu. Lasketaan ensin derivaatta Dx^x käyttämällä ketjusääntöä. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} Dx^x &= De^{x \ln x} = \mathrm{e}^{x \ln x} D(x \ln x) = e^{x \ln x}(D(x) \ln x + xD \ln x) \\ &= e^{x \ln x}(\ln x + x\frac{1}{x}) = e^{x \ln x}(\ln x + 1). \end{aligned}$$

Nyt pätee $e^{x \ln x} > 0$ kaikilla $x \in [\frac{1}{e}, \infty[$, sillä $e^t > 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Koska logaritmifunktio $t \mapsto \ln t$ on aidosti kasvava välillä $]0, \infty[$ (monisteen Lause 9.19) ja $\ln(e^{-1}) = -1$, niin pätee $\ln x > \ln(e^{-1}) = -1$ jokaisella $x > \frac{1}{e}$. Näin ollen pätee $Dx^x > 0$ kaikilla $x \in]\frac{1}{e}, \infty[$ ja $Dx^x = 0$ ainoastaan pisteessä $x = \frac{1}{e}$. Siispä Lauseen 8.6 nojalla funktio $x \mapsto x^x$ on aidosti kasvava joukossa $[\frac{1}{e}, \infty[$.

4. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ missä $f(x) = x + \sin x$. Selvitä sen lokaalit ääriarvot.

Ratkaisu. Havaitaan aluksi, että funktio f on kaikkialla jatkuva ja derivoituva ja pätee $f'(x) = 1 + \cos x$. Näin ollen mahdolliset lokaalit ääriarvokohdat ovat derivaatan $f'(x)$ nollakohdat (mitään epäjatkuvuuskohtia, epäderivoituvuuskohtia ja välin päätepisteitä, joissa voisi olla ääriarvokohtia, ei siis ole). Saadaan siis

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Koska lisäksi pätee $\cos x \geq -1$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$, niin saadaan $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $f'(x) = 0$ ainoastaan pisteissä $x = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Erityisesti derivaatta $f'(x)$ ei voi olla nolla minkään välin $\Delta \subset \mathbb{R}$ kaikissa pisteissä, joten Lauseen 8.6 nojalla funktio f on aidosti kasvava eikä sillä siten ole lokaaleja ääriarvokohtia.

5. Määritellään $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ kun $x \neq 0$ ja $f(0) = 0$. Onko f derivoituva kohdassa $x = 0$? Entä muualla? Onko sen derivaattafunktio jatkuva? Entä rajoitettu?

Ratkaisu. Havaitaan aluksi funktio f derivoituvaksi jokaisella $x \neq 0$ ja tällöin sen derivaatta saadaan tulon derivointikaavalla ja ketjusäännöllä. Siis pätee

$$f'(x) = D(x^2)\sin(\frac{1}{x^2}) + x^2 D(\sin(\frac{1}{x^2})) = 2x\sin(\frac{1}{x^2}) + x^2\cos(\frac{1}{x^2})D(\frac{1}{x^2})$$
$$= 2x\sin(\frac{1}{x^2}) + x^2\cos(\frac{1}{x^2})(-2)x^{-3} = 2x\sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x},$$

kun $x \neq 0$. Tutkitaan funktion f derivoituvuus pisteessä $x = 0$ erotusosamäärän avulla. Olkoon $h \neq 0$. Tällöin saadaan

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{h^2\sin(\frac{1}{h^2})}{h} = h\sin(\frac{1}{h^2}).$$

Koska pätee $|\sin(\frac{1}{h^2})| \leq 1$ jokaisella $h \neq 0$, saadaan

$$|\frac{f(h) - f(0)}{h} - 0| = |h\sin(\frac{1}{h^2})| \leq |h| \to 0,$$

kun $h \to 0$. Siispä funktio f on derivoituva pisteessä $x = 0$ ja

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}(h\sin(\frac{1}{h^2})) = 0.$$

Tutkitaan seuraavaksi derivaatan f' jatkuvuutta pisteessä $x = 0$. Olkoon jokaisella $k \in \mathbb{N}$ määritelty piste $x_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$. Tällöin pätee $x_k \to 0+$, kun $k \to \infty$. Lisäksi havaitaan $\frac{1}{x_k^2} = 2\pi k$, joten pätee $\sin(\frac{1}{x_k^2}) = 0$ ja $\cos(\frac{1}{x_k^2}) = 1$. Näin ollen saadaan

$$f'(x_k) = 2x_k\sin(\frac{1}{x_k^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{x_k^2})}{x_k} = -\frac{2}{x_k} = -2\sqrt{2\pi k} \to -\infty,$$

kun $k \to \infty$. Toisaalta jos määritellään pisteet $y_k = \frac{1}{\sqrt{\pi + 2\pi k}}$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, pätee $y_k \to 0+$, kun $k \to \infty$, $\sin(\frac{1}{y_k^2}) = 0$ ja $\cos(\frac{1}{y_k^2}) = -1$. Näin ollen

$$f'(y_k) = 2y_k\sin(\frac{1}{y_k^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{y_k^2})}{y_k} = \frac{2}{y_k} = 2\sqrt{\pi + 2\pi k} \to \infty,$$

kun $k \to \infty$. Siispä $f'(x)$ ei lähesty mitään lukua, kun $x \to 0+$. Näin ollen $f'(x)$ ei ole jatkuva, sillä se ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$. Lisäksi $f'(x)$ ei ole rajoitettu, sillä se ei ole rajoitettu millään pisteen $x = 0$ sisältävällä välillä Δ.

6. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla $x \in [0; 0,99]$ pätee

$$\frac{1}{12}x^4 \leq \cos x - (2 - \cosh x) \leq \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{720}x^6$$

Tehtävässä sovelletaan harjoitusten 10 tehtävän 1 ajatustapaa (sitä ei tällä kertaa täydy erikseen perustella.) Tehtävässä saa käyttää tietoa, että kohdassa $x = 0,99$ on $-\cos x + \cosh x < 1$. Tutkitaan apufunktiota

$$f(x) = (\cos x - (2 - \cosh x)) - \frac{1}{12}x^4.$$

Osoita ensin että apufunktion kuudes derivatta toteuttaa ehdon $0 \leq f^{(6)}(x) \leq 1$ kun $x \in]0; 0,99[$ (- kannattaa osoittaa, että kuudes derivaatta on aidosti kasvava tutkittavalla välillä.) Tästä edetään edellä mainitun tehtävän 1 tapaan askel askeleelta alempiin derivaattoihin kunnes saadaan tietoa itse apufunktiosta f.

Ratkaisu. Lasketaan ensin tehtävässä mainitun apufunktion $f(x)$ derivaatat $f^{(n)}(x),\ 1 \leq n \leq 7:$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x + \sinh x - \frac{1}{3}x^3 \\
f''(x) &= -\cos x + \cosh x - x^2 \\
f'''(x) &= \sin x + \sinh x - 2x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x + \cosh x - 2 \\
f^{(5)}(x) &= -\sin x + \sinh x \\
f^{(6)}(x) &= -\cos x + \cosh x \\
f^{(7)}(x) &= \sin x + \sinh x.
\end{aligned}$$

Todetaan aluksi, että pätee $\frac{1}{12}x^4 = \cos x - (2 - \cosh x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{720}x^6$, kun $x = 0$. Näin ollen voimme jatkossa (mukavuussyistä) tarkastella arvoja $x > 0$. Määritellään $I =]0; 0,99]$. Nyt sinifunktiolle on voimassa $\sin x > 0$, kun $x \in I$ ja lisäksi tehtävän 1 (a)-kohdan nojalla pätee $\sinh x > \sin x$ kaikilla $x > 0$. Näin ollen saadaan $f^{(7)}(x) = \sin x + \sinh x > 2\sin x > 0$ jokaisella $x \in I$. Siispä funktio $f^{(6)}$ on aidosti kasvava välillä I Lauseen 8.6 nojalla, joten pätee $0 = f^{(6)}(0) < f^{(6)}(x) \leq f^{(6)}(0,99) < 1$ jokaisella $x \in I$ (yläarviossa käytettiin tehtävässä mainittua faktaa $-\cos x + \cosh x < 1$, kun $x = 0,99$). Siis on saatu arvio

$$0 < f^{(6)}(x) < 1 \tag{1}$$

jokaisella $x \in I$. (Huomaa, että $f^{(n)}(0) = 0$ jokaisella $1 \leq n \leq 7$. Lähtien arviosta $f^{(6)}(x) > 0$ kaikilla $x \in I$ voidaan todeta funktio $f^{(5)}$ aidosti kasvavaksi välillä I Lauseen 8.6 nojalla ja siten $f^{(5)}(x) > 0 = f^{(5)}(0)$ kaikilla $x \in I$. Jatkamalla samaa päättelyä (Lause 8.6) alempiin derivaattoihin saadaan siis kaiken kaikkiaan $f^{(n)}(x) > 0 = f^{(n)}(0)$ jokaisella $x \in I$ ja jokaisella $1 \leq n \leq 7$. Tätä ei enää perustella tulevissa arvioissa (2) - (6).)

Sovelletaan seuraavaksi jokaisella $x \in I$ väliarvolausetta funktioon $f^{(5)}$ välillä $[0, x]$, jolloin löytyy siis luku $\psi_1 = \psi_1(x) \in]0, x[$, jolle $f^{(5)}(x) - f^{(5)}(0) = f^{(6)}(\psi_1)x$. Käyttämällä arviota (1) saadaan estimaatti

$$0 < f^{(5)}(x) < x \tag{2}$$

jokaisella $x \in I$. Sovelletaan harjoitusten 10 tehtävän 1 ideaa ja tutkitaan funktiota $g_1 : t \mapsto f^{(4)}(t) - \frac{1}{2}t^2$. Nyt funktio g_1 toteuttaa väliarvolauseen vaatimukset jokaisella välillä $[0, x]$, $x \in I$ ja sen derivaatta on $g_1'(t) = f^{(5)}(t) - t$. Näin ollen kaikilla $x \in I$ on olemassa luku $\psi_2 \in]0, x[$, jolle $g_1(x) - g_1(0) = g_1'(\psi_2)(x - 0) < 0$, sillä $g_1'(\psi_2) < 0$ arvion (2) nojalla ja $x > 0$. Saadaan siis $g_1(x) < 0$ eli $f^{(4)}(x) < \frac{1}{2}x^2$ jokaisella $x \in I$. Siispä saamme

$$0 < f^{(4)}(x) < \frac{1}{2}x^2 \tag{3}$$

kaikilla $x \in I$. Vastaavalla tavalla sovelletaan väliarvolausetta funktioon $g_2 : t \mapsto f^{'''}(t) - \frac{1}{6}t^3$, jonka derivaatta siis on $g_2'(t) = f^{(4)}(t) - \frac{1}{2}t^2$, ja käyttämällä arviota (3) saadaan $g_2(x) = g_2'(\psi_3)x < 0$ kaikilla $x \in I$ (luku $\psi_i \in]0, x[$, $1 \leq i \leq 6$ on väliarvolauseessa esiintyvä luku). Siis pätee

$$0 < f^{'''}(x) < \frac{1}{6}x^3 \tag{4}$$

kaikilla $x \in I$. Edelleen tutkitaan funktiota $g_3 : t \mapsto f^{''}(t) - \frac{1}{24}t^4$, jolle pätee $g_3'(t) = f^{'''}(t) - \frac{1}{6}t^3$, joten arvion (4) perusteella saadaan $g_3(x) = g_3'(\psi_4)x < 0$ kaikilla $x \in I$. Näin ollen

$$0 < f^{''}(x) < \frac{1}{24}x^4 \tag{5}$$

kaikilla $x \in I$. Seuraavaksi katsotaan funktiota $g_4 : t \mapsto f^{'}(t) - \frac{1}{120}t^5$, jolle $g_4'(t) = f^{''}(t) - \frac{1}{24}t^4$. Tällöin väliarvolauseen ja arvion (5) nojalla pätee $g_4(x) = g_4'(\psi_5)x < 0$ kaikilla $x \in I$. Siispä pätee

$$0 < f^{'}(x) < \frac{1}{120}x^5 \tag{6}$$

kaikilla $x \in I$. Soveltamalla vielä kerran väliarvolausetta funktioon $g_5 : t \mapsto f(t) - \frac{1}{720}t^6$, jolle $g_5'(t) = f'(t) - \frac{1}{120}t^5$, saadaan arvion (6) avulla $g_5(x) = g_5'(\psi_6)x < 0$ kaikilla $x \in I$. Täten saadaan $0 < f(x) < \frac{1}{720}x^6$ kaikilla $x \in I$ ja huomioimalla tapaus $x = 0$ voidaan todeta, että

$$\frac{1}{12}x^4 \leq \cos x - (2 - \cosh x) \leq \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{720}x^6$$

kaikilla $x \in [0; 0,99]$.