MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 8
Mallit (Ansku)

1. Osoita määritelmien perusteella, että

$$6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x \to \infty.$$

kun $x \to \infty$ ja kun $x \to -\infty$.

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$. Osoitetaan ensin, että $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$. Olkoon $M \in \mathbb{R}$, ja voidaan olettaa, että $M > 0$. Halutaan osoittaa, että funktion f arvot saadaan suuremmiksi kuin M, kunhan x on tarpeeksi suuri. Seuraavan arvioinnin voi tehdä monella tavalla, tässä yksi:

$$\begin{aligned} 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x &= x^5(6x-5) + x^3(4x-3) + x(2x-1) \\ &\overset{(1)}{>} x^5 + x^3 + x \overset{(2)}{>} x + x + x = 3x. \end{aligned}$$

(1) Oletetaan, että $x > 1$, ja arvioidaan sulkujen sisällä olevia lausekkeita suuremmiksi kuin 1. Esimerkiksi $x > 1 \iff 6x > 6 \iff 6x-5 > 6-5 = 1$.
(2) Kun $x > 1$, niin $x^5 > x$ ja $x^3 > x$.

Valitaan $M' = \max\{1, M\}$. Nyt, kun $x > M'$, niin

$$f(x) = 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x > 3x > 3M' \geq 3M > M.$$

Osoitetaan sitten, että $f(x) \to \infty$, kun $x \to -\infty$. Olkoon $M \in \mathbb{R}$, ja voidaan olettaa, että $M > 0$.

$$\begin{aligned} 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x &\overset{(1)}{>} 6x^6 + 4x^4 + 2x^2 \\ &\overset{(2)}{>} 2x^2 > x^2 \end{aligned}$$

(1) Oletetaan, että $x < -1$. Nyt muuttujan x parittomat potenssit voidaan arvioida suuremmiksi kuin 0. Esimerkiksi $x < -1 \iff x^5 < -1 \iff -5x^5 > 5 > 0$.
(2) Muuttujan x parilliset potenssit ovat positiivisia, kun $x < -1$.

Saadaan $x^2 > M$, kun $x > \sqrt{M}$ tai $x < -\sqrt{M}$. Valitaan $M' = \min\{-\sqrt{M}, -1\}$. Nyt, kun $x < M'$, niin

$$f(x) = 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x > x^2 > (-\sqrt{M'})^2 \geq (-\sqrt{M})^2 = M.$$

2. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että yhtälöllä

$$6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x = 2009$$

on ainakin yksi positiivinen ratkaisu.

Ratkaisu. Halutaan siis osoittaa, että on olemassa jokin $x > 0$, jolla funktio $f(x) = 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$ saa arvon 2009. Funktio f on jatkuva, koska se on polynomifunktio. Lisäksi $f(0) = 0$. Tehtävässä 1 osoitettiin, että $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, eli kaikilla $M > 0$ saadaan $f(x) \geq M$, kunhan x on tarpeeksi suuri. Valitaan esimerkiksi $M = 3000$. Nyt Bolzanon lauseen mukaan jatkuva funktio f saa kaikki arvot väliltä $[0, 3000]$ eli myös arvon 2009 jollakin $x > 0$.

3. Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$$

saa, on pienin.

Ratkaisu. Funktio f on jatkuva, kuten aikaisemmin on jo todettu. Pienimmän arvon olemassaolo voitaisiin osoittaa Weierstrassin min-max-lauseella, jos kysymyksessä olisi suljettu väli. Tehtävässä 1 osoitettiin, että $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$ ja kun $x \to -\infty$, joten pienimmän arvon etsiminen voidaan rajoittaa sopivalle suljetulle välille.

Huomataan ensin, että $f(0) = 0$. Valitaan esimerkiksi $M = f(0) + 1 = 1$, jolloin $f(0) < M$. Nyt on olemassa suljettu väli $[a, b]$, missä $a < 0 < b$, jonka ulkopuolella (eli kun $x < a$ tai $x > b$) pätee $f(x) > M$. Weierstrassin min-max-lauseen nojalla jatkuvalla funktiolla f on suljetulla välillä $[a, b]$ olemassa pienin arvo $f(x_0)$. Koska $f(x_0) \leq f(0) < M$, niin $f(x_0)$ on funktion f pienin arvo koko reaaliakselilla. Siis funktiolla on olemassa pienin arvo.

4. Määritellään funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$. Onko funktiolla f käänteisfunktiota? Onko se aidosti kasvava? Entä jatkuva?

Ratkaisu. Tiedetään, että aidosti kasvavalla jatkuvalla funktiolla on käänteisfunktio. Osoitetaan ensin, että f on aidosti kasvava.

Tarkastellaan ensin funktiota $\sqrt[5]{x}$. Aikaisemmin on osoitettu, että jos $0 < x < y$, niin $x^n < y^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $x, y > 0$ ja $x < y$. Jos nyt olisi $\sqrt[5]{x} > \sqrt[5]{y}$, niin korottamalla tämä epäyhtälö puolittain potenssiin 5 saataisiin $x > y$, joka on ristiriita. Siis $\sqrt[5]{x}$ on aidosti kasvava, ja samoin voidaan osoittaa funktion $\sqrt[3]{x}$ aidosti kasvavuus.
Nyt, jos $0 < x < y$, niin

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} < \sqrt[3]{y} + \sqrt[5]{y} = f(y).$$

Siis f on aidosti kasvava. Se on myös jatkuva. Funktio $\sqrt[5]{x}$ on jatkuvan funktion x^5 käänteisfunktio, joten se on myös jatkuva. Samoin funktio $\sqrt[3]{x}$ on jatkuvan funktion x^3 käänteisfunktiona jatkuva. Nyt lauseen 6.9 nojalla funktiolla f on olemassa (jatkuva ja aidosti kasvava) käänteisfunktio.