MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 2. kurssikoetta varten
Mallit (Ansku)

Kaikkia trigonometristen funktioiden ja eksponenttifunktion tuttuja ominaisuuksia saa käyttää tehtävissä 3 ja 4.

1. Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \to 5} \frac{(x+2)(x-4)}{(3x+2)(3x-4)}.$$

Ratkaisu. Käytetään raja-arvojen summaa, tuloa ja osamäärää koskevaa lausetta 5.4. Tiedetään, että $\lim_{x\to 5} x = 5$ ja $\lim_{x\to 5} a = a$, kun $a \in \mathbb{R}$ on vakio. Saadaan

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 5} x + 2 = \lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 2 = 5 + 2 = 7 \\
&\lim_{x\to 5} x - 4 = 5 - 4 = 1 \\
&\lim_{x\to 5} 3x = 3 \cdot 5 = 15 \\
&\lim_{x\to 5} 3x + 2 = 15 + 2 = 17 \\
&\lim_{x\to 5} 3x - 4 = 15 - 4 = 11 \\
&\lim_{x\to 5} (x+2)(x-4) = 7 \cdot 1 = 7 \\
&\lim_{x\to 5} (3x+2)(3x-4) = 17 \cdot 11 = 187 \neq 0 \\
&\lim_{x\to 5} \frac{(x+2)(x-4)}{(3x+2)(3x-4)} = \frac{7}{187}.
\end{aligned}$$

2. Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien avulla, että f on jatkuva kohdassa $x = 2$, jos kaikilla x pätee

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Ratkaisu. Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 2$, jos

$$\lim_{x\to 2} = f(2) = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}.$$

Osoitetaan tämä raja-arvon määritelmän avulla:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(2)| = |\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}| &\overset{(1)}{=} \left| \frac{x^2+1-5}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}} \right| = \frac{|x^2-4|}{|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}|} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{|x-2||x+2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}} = |x-2| \frac{|x+2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}} \\
&\overset{(3)}{<} |x-2| \frac{|3+2|}{\sqrt{x^2+1}} = |x-2| \frac{5}{\sqrt{x^2+1}} \overset{(4)}{\leq} 5|x-2| < 5\delta < \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$.

(1) Käytetään "lavennustemppua" eli lavennetaan juurien summalla ja käytetään kaavaa $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
(2) Poistetaan nimittäjästä itseisarvot ja kirjoitetaan osoittaja tulomuodossa, jotta saadaan tekijä $|x-2|$ esiin.
(3) Arvioidaan lauseketta. Koska tutkitaan funktion raja-arvoa kohdassa $x = 2$, voidaan olettaa, että $1 < x < 3$ (eli $\delta < 1$).
(4) Jatketaan arviointia huomaamalla, että $\sqrt{x^2+1} \geq 1$ kaikilla x.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$. Nyt

$$|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}| = \frac{|x^2-4|}{|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}|} < 5|x-2| < 5\delta < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon,$$

kun $0 < |x-2| < \delta$. Siis funktio f on jatkuva kohdassa $x = 2$.

3. Oletetaan, että $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja aidosti kasvava, ja että $f(0) = 0$. Osoita, että on olemassa $x > 0$, jolle pätee

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Ratkaisu. Merkitään $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Funktiosta g tiedetään, että se on jatkuva, $g(0) = 1$, ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Muodostetaan apufunktio $h(x) = f(x) - g(x)$, joka on jatkuva kaikilla $x \geq 0$. Käytetään Bolzanon lausetta apufunktion tutkimiseen. Valitaan ensin sopiva suljettu väli, jonka alkupiste on $x = 0$.

Koska $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, niin jollakin x_1 pätee $|g(x) - 0| < \varepsilon$ eli $g(x) < \varepsilon$. Koska $f(0) = 0$ ja f on aidosti kasvava, niin jollakin x_2 pätee $f(x) > \varepsilon$. Valitaan nyt $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$. Tällöin $g(x_0) < \varepsilon < f(x_0)$ eli $g(x_0) < f(x_0)$.

Tarkastellaan apufunktiota h suljetulla välillä $[0, x_0]$.

$$
\begin{aligned}
h(0) &= f(0) - g(0) = 0 - 1 = -1 < 0 \\
h(x_0) &= f(x_0) - g(x_0) > 0
\end{aligned}
$$

Koska jatkuvan funktion h arvot suljetun välin $[0, x_0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin Bolzanon lauseen nojalla on olemassa jokin $c \in]0, x_0[$, jolle $h(c) = f(c) - g(c) = 0$ eli $f(c) = g(c)$. Tämä c on etsitty luku, ja tehtävän väite pätee.

4. Osoita, että kaikilla $x > 0$ pätee $\sinh x > x$. (Muista, että $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ja $D \sinh x = \cosh x$.)

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = \sinh x - x$. Nyt $f(0) = \sinh 0 - 0 = 0$ ja $f'(x) = \cosh x - 1$. Tiedetään, että $\cosh x \geq 1$ kaikilla x, ja $\cosh x > 1$, kun $x > 0$. Siis $f'(x) = \cosh x - 1 > 0$, kun $x > 1$. Nyt lauseen(8.6) nojalla funktio f on aidosti kasvava. Koska $f(0) = 0$, niin $f(x) = \sinh x - x > 0$ eli $\sinh x > x$ kaikilla $x > 0$.

Perustelu sille, että $\cosh x > 1$, kun $x > 0$: $\cosh 0 = \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = 1$. Kun $x > 0$, niin $e^x > 1$ ja $e^{-x} = \frac{1}{e^x} < 1$. Tällöin $e^x - e^{-x} > 0$, ja siis

$$D \cosh x = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0.$$

Siis funktio $\cosh x$ on aidosti kasvava, kun $x > 0$ eli $\cosh x > \cosh 0 = 1$ kaikilla $x > 0$.