MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 8
16. 11. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Tiina Kainulainen)

1. Osoita, että

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2}$$

on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ratkaisu: Osoitetaan, että f on jatkuva mielivaltaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}$. On siis osoitettava, että raja-arvo $\lim_{x\to a} f(x)$ on olemassa ja että sen arvo on $f(a)$. Pidetään tunnettuna, että $\lim_{x\to a} x = a$ ja että vakiofunktion raja-arvo missä tahansa pisteessä on k.o. vakio. Tällöin lauseen 5.4 (monisteessa s. 34) kohdan (3) perusteella on olemassa raja-arvot

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x \cdot x) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a \cdot a = a^2 \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to a} x^3 = \lim_{x\to a}(x \cdot x^2) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x^2 = a \cdot a^2 = a^3.$$

Edelleen lauseen 5.4. kohdan (1) nojalla

$$\lim_{x\to a}(x^3 + x^2 + x + 1) = \lim_{x\to a} x^3 + \lim_{x\to a} x^2 + \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 1 = a^3 + a^2 + a + 1 \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to a}(x^2 + 2) = \lim_{x\to a} x^2 + \lim_{x\to a} 2 = a^2 + 2.$$

Koska $\lim_{x\to a}(x^2 + 2) = a^2 + 2 \neq 0$, niin lauseen 5.4. kohdan (4) nojalla

$$\lim_{x\to a} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x\to a}(x^3 + x^2 + x + 1)}{\lim_{x\to a}(x^2 + 2)} = \frac{a^3 + a^2 + a + 1}{a^2 + 2}.$$

Oikeanpuoleinen lauseke on myös funktion f arvo pisteessä a, kuten suoraan sijoittamalla nähdään. Väite on siis todistettu.

2. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^{999} + x^{666} + 333$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x \in]0, 1[$, jolle pätee $f(x) = 334$.

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva. Jos haluaa osoittaa tämän viimeisen päälle täsmällisesti vetoamatta siihen, että polynomit ovat aina jatkuvia, mutta ei halua soveltaa 1663 kertaa lauseen 5.4. kohtaa (3), niin kannattaisi osoittaa ensin induktiolla aputulos: $\lim_{x\to a} x^k = a^k$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$, mikä osoitetaan hyvin samalla tavalla kuin harjoitusten 7. malliratkaisuissa tehtävässä 1. todistettu aputulos. Tämän jälkeen käytetään lauseen 5.4. kohtaa (1) kuten edellisessä tehtävässä.

Huomataan, että $f(0) = 0 + 0 + 333 = 333$ ja että $f(1) = 1 + 1 + 333 = 335$. Koska f on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä ja erityisesti suljetulla välillä $[0, 1]$, niin Bolzanon lauseen mukaan se saa tällä välillä kaikki lukujen 333 ja 335 välillä olevat arvot. Erityisesti on siis olemassa sellainen $x_0 \in]0, 1[$, jolle $f(x_0) = 334$.

Huomautus: Kurssilla kutsutaan Bolzanon lauseeksi sekä monisteen Bolzanon lauseeksi nimettyä lausetta että sen seurauslausetta 6.8. (sivu 41). Jos haluaa ratkaista tehtävän käyttämällä pelkästään monisteen Bolzanon lausetta, niin voisi määritellä apufunktion $h(x) = f(x) - 334$, ja osoittaa, että $h(0) < 0$ ja $h(1) > 0$, jolloin on olemassa sellainen $x_0 \in]0, 1[$, jolle $h(x_0) = 0$.

3. Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoita, että $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$ ja $f(x) \to \infty$ kun $x \to \infty$. Osoita näiden havaintojen avulla, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 777$.

Ratkaisu:

(a) Osoitetaan, että $f(x) \to \infty$ kun $x \to \infty$. Olkoon $M \in \mathbb{R}$ (voidaan olettaa, että $M > 0$). Valitaan $R = \max\{1, M\}$ ja olkoon $x > R$. Tällöin pätee $f(x) = x^{999} + x^{666} + 333 > x^{999} + x^{666} > x + x > 2R \geq 2M > M$. Siis $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) Osoitetaan, että $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$. Olkoon $m \in \mathbb{R}$. (Voidaan olettaa, että $m < 0$.) Valitaan $r = m - 334$, jolloin varmasti $r < -1$, kun m on negatiivinen luku. Olkoon $x < r$. Tällöin pätee

$$x^{999} + x^{666} = x^{666}(x^{333} + 1) < 1 \cdot (x^{333} + 1) = x^{333} + 1, \tag{1}$$

sillä ensinnäkin $x^{666} = |x|^{666} > 1$, koska $x < -1$ ja siten $|x| > 1$, ja toisaalta $x^{333} + 1 < 0$ kun $x < -1$. Toisaalta edelleen tiedon $x < -1$ nojalla on voimassa

$$x^{333} + 1 = -|x|^{333} + 1 < -|x| + 1 = x + 1 < m - 334 + 1 = m - 333. \tag{2}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (1) ja (2) nähdään, että kaikilla $x < r$ pätee $x^{999} + x^{666} < m - 333$ eli $x^{999} + x^{666} + 333 < m$. On osoitettu, että $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(c) Osoitetaan, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 777$. Kohdan (a) nojalla on olemassa sellainen luku R, että $f(x) > 777$ aina, kun $x > R$. Esimerkiksi $f(R+1) > 777$. Toisaalta kohdassa (b) todistetun nojalla on olemassa sellainen luku r (välttämättä $r < R$), että vaikkapa $f(x) < -3$ aina, kun $x < r$. Esimerkiksi $f(r - 1) < -3$. Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[r - 1, R + 1]$, ja pätee $f(r - 1) < -3 < 777 < f(R + 1)$. Bolzanon lauseen (seurauslauseen) mukaan funktio f saa kaikki arvot väliltä $[f(r-1), f(R+1)]$, joten erityisesti on olemassa sellainen $x_0 \in]r-1, R+1[$, että $f(x_0) = 777$.

Huomautus: Kohdassa (c) voisi käyttää arvon $f(r-1)$ tilalla konkreettista arvoa $f(0) = 333 < 777$. Ylläoleva ratkaisu kuitenkin toimii myös siinä tilanteessa, jos funktion f lauseketta ei olisi annettu, vaan tiedettäisiin vain että f on jatkuva, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4. Olkoon f tehtävän 2 funktio. Määritellään

$$g(x) = \sqrt{f(x)^2 + 1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio g saa on pienin.

Ratkaisutapa 1: Huomataan ensiksi, että kaikilla x pätee

$$\sqrt{f(x)^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1. \tag{3}$$

Jos nyt saisimme osoitettua, että $g(x_0) = 1$ jollakin x_0 eli funktio g todella saa arvon 1, niin tämä osoittaisi väitteen, sillä lukua 1 pienempiä arvoja g ei saa. Huomataan, että jos löytäisimme sellaisen x_0, jolla $f(x_0) = 0$, niin tämä olisi etsitynlainen piste. Funktio f on 999. asteen polynomi, eikä sen nollakohtien etsiminen kuulosta kovin mukavalta, mutta intuitiivisesti lienee selvää, että jossakin kohden sen kuvaaja leikkaa x-akselin. Todistetaan tämä täsmällisesti:

Edellisessä tehtävässä osoitettiin, että $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, ja näin ollen on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}$, että $f(x) < 0$, kun $x < r$. Esimerkiksi $f(r-1) < 0$. Toisaalta $f(0) = 333 > 0$ (ja täytyy myös olla $r < 0$, koska muutenhan edellinen ehto ei pätisi). Koska funktio f on jatkuva välillä $[r-1, 0]$, niin Bolzanon lauseen mukaan se saa tällä välillä kaikki arvot väliltä $[f(r-1), f(0)] = [f(r-1), 333]$. Erityisesti on olemassa sellainen $x_0 \in]r-1, 0[$, että $f(x_0) = 0$. Siispä

$$g(x_0) = \sqrt{f(x_0)^2 + 1} = \sqrt{0^2 + 1} = 1,$$

eli funktio g saa arvon 1 joka arvion (3) nojalla on sen pienin arvo.

Ratkaisutapa 2: Jos tiedetään, että g on jatkuva, niin pienimmän arvon olemassaolo voidaan osoittaa myös Weierstrassin min-max -lauseen (moniste s. 42) avulla "löytämättä" pienintä arvoa 1. Min-max -lause koskee vain suljetulla välillä määriteltyjä funktioita, mutta osoittautuu, että tarkastelu voidaankin nyt rajoittaa suljetulle välille. Tätä varten tarvitsemme tietoa, että $g(x) \to \infty$, kun $x \to \pm\infty$. Kaikilla x pätee

$$g(x) = \sqrt{f(x)^2 + 1} \geq \sqrt{f(x)^2} = |f(x)|,$$

ja tiedoista $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ja $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ seuraa helposti, että $|f(x)| \to \infty$ kun $x \to \pm\infty$. Siispä myös $g(x) \to \infty$.

Tiedetään, että $g(0) = \sqrt{f(0)^2 + 1} = \sqrt{333^2 + 1}$. Määritellään vaikkapa $M = \sqrt{333^2 + 5}$, jolloin (neliöjuuren kasvavuuden nojalla) $g(0) < M$. Koska $g(x) \to \infty$, kun $x \to \pm\infty$, niin on olemassa sellaiset $r, R \in \mathbb{R}$, että $g(x) > M$ aina, kun pätee joko $x \leq r$ tai $x \geq R$. (Rajatta kasvamisen määritelmässä esiintyy aito epäyhtälö, mutta korvataan tarvittaessa r ja R luvuilla $r-1$ ja $R+1$ kuten tehtävässä 3. (c).) Lisäksi, koska $g(0) < M$, niin täytyy olla $r < 0 < R$. Nyt päästään soveltamaan Weierstrassin min-max -lausetta: koska g on jatkuva suljetulla välillä $[r, R]$, niin sillä on tällä välillä pienin arvo. Merkitään tätä $y_0 = \min\{g(x) : x \in [r, R]\}$. Välttämättä pätee $y_0 \leq g(0)$, koska $0 \in [r, R]$.

Nyt y_0 on itseasiassa funktion pienin arvo koko $\mathbb{R}$:ssä: Jos nimittäin $x \in [r, R]$, niin $g(x) \geq y_0$ määritelmän perusteella, mutta jos taas $x < r$ tai $x > R$, niin pätee

$$g(x) > M > g(0) \geq y_0.$$

Funktion g jatkuvuus voidaan tarvittaessa perustella kurssimonisteessa osoitettujen tulosten avulla: Neliöjuurifunktion jatkuvuus seuraa lauseesta 6.9, sillä neliöjuuri on jatkuvan funktion $x \mapsto x^2$ käänteisfunktio positiivisella reaaliakselilla. Sisäfunktion $x \mapsto f(x)^2 + 1$ jatkuvuus taas seuraa lauseesta 5.4, kun tiedettiin, että f on jatkuva. Lisäksi tarvitaan tietoa, että jatkuvista funktioista yhdistetty funktio on jatkuva (lause 6.5). Kun nämä tiedetään, niin voidaan todeta, että g on jatkuva funktio.

5. Tarkastellaan tehtävän 2 lausekkeella määriteltyä funktiota $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Osoita, että sillä on aidosti kasvava ja jatkuva käänteisfunktio.

Ratkaisu: Tarkoituksena olisi osoittaa, että f itse on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$ ja soveltaa lausetta 6.9. Tätä varten tarvitsemme tietoa, että kaikki kokonaislukupotenssit ovat positiivisella reaaliakselilla aidosti kasvavia, minkä voisi pitää tunnettunakin mutta esitetään tässä yksi tapa perustella asia.

Olkoon $0 < x < y$. Harjoitusten 1. tehtävässä 3. osoitettiin, että tällöin pätee $x^2 < y^2$. Jatketaan tästä induktiolla: oletetaan, että pätee $x^k < y^k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$ ja osoitetaan, että tästä seuraa $x^{k+1} < y^{k+1}$. Kertomalla epäyhtälö $x^k < y^k$ puolittain positiivisella luvulla x saadaan, että $x \cdot x^k < x \cdot y^k$, mutta toisaalta kertomalla epäyhtälö $x < y$ puolittain positiivisella luvulla y^k saadaan, että $x \cdot y^k < y \cdot y^k$. Yhdistämällä nämä kaksi tietoa saadaan mitä haluttiinkin:

$$x^{k+1} = x \cdot x^k < x \cdot y^k < y \cdot y^k = y^{k+1}.$$

Siirrytään nyt tutkimaan itse funktiota f. Olkoot $x, y \in [0, \infty[$, $x < y$. Tällöin $x^{999} < y^{999}$ ja $x^{666} < y^{666}$, ja näin ollen

$$f(x) = x^{999} + x^{666} + 333 < y^{999} + y^{666} + 333 = f(y),$$

eli f on aidosti kasvava ja siten injektio, ja määrittelee bijektion $f : [0, \infty[\to f[0, \infty[$. Voidaan itseasiassa saman tien osoittaa, että arvojoukko $f[0, \infty[$ on väli $[333, \infty[$. Nimittäin koska $f(0) = 333$, ja f on aidosti kasvava, niin kaikki funktion f välillä $[0, \infty[$ saamat arvot sisältyvät välille $[333, \infty[$. Toisaalta, jos $y > 333$, niin funktion arvot ovat jostakin lähtien suurempia kuin y (koska f kasvaa rajatta kun x kasvaa), joten aiemmin todettu jatkuvuus ja Bolzanon lause kertovat taas, että se saa myös arvon y.

Jatkuvalla ja aidosti kasvavalla funktiolla f on siis olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : [333, \infty[\to [0, \infty[$. Koska lisäksi funktion f määrittelyjoukko on väli, niin lauseen 6.9 oletukset ovat voimassa, ja lauseen mukaan myös f^{-1} on jatkuva ja aidosti kasvava.

Huomautus 1: Lauseessa 6.9 on oleellista, että määrittelyjoukko on väli (joko rajoitettu tai rajoittamaton). Esimerkiksi funktiolle $f : [0, 1[\cup [2, 3] \to [0, 2]$, $f(x) = x$, kun $x \in [0, 1[$ ja $f(x) = x - 1$, kun $x \in [2, 3]$, lauseen muut oletukset ovat voimassa, mutta määrittelyjoukko ei ole väli ja käänteisfunktio sattuu olemaan epäjatkuva.

Huomautus 2: Tehtävänannon merkinnästä huolimatta tässä ei pyydetty osoittamaan, että on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, sillä eihän f ole surjektio, kun maalijoukkona on koko $\mathbb{R}$. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on siis ainoastaan injektion f arvojoukko. Itseasiassa ei edes ole olemassa jatkuvaa bijektiota $[0, \infty[\to \mathbb{R}$. (Mitä tapahtuisi pisteessä 0, jos tällainen olisi olemassa, kun jatkuva funktio kuvaa välit väleiksi?)

6. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Oletetaan, että $f(1) < f(3)$ ja $f(2) > f(4)$. Osoita, että on olemassa kaksi eri reaalilukua x ja y, joilla $f(x) = f(y)$. (Tämä tehtävä on erikoistapaus tuloksesta, jonka mukaan jatkuva injektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on välttämättä aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.)

Ratkaisutapa 1: Määritellään taas apufunktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - f(x+2)$, joka on jatkuva: jokaisella $a \in \mathbb{R}$ pätee nimittäin $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ja $\lim_{x\to a} f(x+2) = f(a+2)$, sillä f on jatkuva jokaisessa pisteessä, joten lauseen 5.4. kohdan (1) nojalla $\lim_{x\to a} h(x) = f(a)+f(a+2) = h(a)$. Funktiolle h pätee oletusten $f(1) < f(3)$ ja $f(2) > f(4)$ nojalla

$$h(1) = f(1) - f(1+2) = f(1) - f(3) < 0 \text{ ja}$$

$$h(2) = f(2) - f(2+2) = f(2) - f(4) > 0.$$

Koska h on jatkuva välillä $[1, 2]$, niin Bolzanon lauseen mukaan on siis olemassa sellainen $x_0 \in]1, 2[$, että $h(x_0) = 0$. Toisin sanoen $f(x_0) - f(x_0 + 2) = 0$ eli $f(x_0) = f(x_0+2)$. Kuitenkin $x_0 \neq x_0+2$, joten on löydetty kaksi eri reaalilukua, joilla funktion f arvot ovat samat.

Ratkaisutapa 2: Tämä ratkaisu on pidempi mutta kenties havainnollisempi. Tiedämme jotain siitä, miten funktion arvot pisteissä 1, 2, 3 ja 4 suhtautuvat toisiinsa, mutta emme esimerkiksi tiedä, kumpi arvoista $f(2)$ ja $f(3)$ on suurempi. Kannattaa aluksi piirtää muutama kuva siitä, miltä tilanne voisi näyttää. Voidaan kuitenkin olettaa, että $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ ja $f(4)$ ovat kaikki eri lukuja, koska muussa tapauksessa olisi jo löydetty kaksi eri pistettä, joissa funktion arvot ovat samat. Tarkastellaan sitä, missä eri suuruusjärjestyksissä nämä neljä arvoa voivat olla keskenään – niin, että tehtävän oletukset ovat myös voimassa. Osoittautuu, että eri tapauksia on kuusi. (Tämän voi halutessaan tarkistaa vaikkapa käymällä läpi kaikki eri järjestykset, mihin neljä eri lukua voidaan asettaa, ja karsimalla pois ne joissa tehtävän oletukset eivät päde..)

(1.) $f(1) < f(4) < f(2) < f(3)$

(2.) $f(4) < f(1) < f(2) < f(3)$

(3.) $f(4) < f(2) < f(1) < f(3)$

(4.) $f(1) < f(3) < f(4) < f(2)$

(5.) $f(1) < f(4) < f(3) < f(2)$

(6.) $f(4) < f(1) < f(3) < f(2)$

Kaikki kuusi tapausta voisi tutkia erikseenkin, mutta tarkastelua voi vähän lyhentää seuraavasti. Huomataan, että tapauksissa 1. - 3. pätee $f(4) < f(2) < f(3)$. Koska f on jatkuva välillä $[3, 4]$, niin Bolzanon lauseen mukaan se saa tällä välillä kaikki lukujen $f(3)$ ja $f(4)$ välillä olevat arvot. Erityisesti se saa arvon $f(2)$ eli on olemassa sellainen $x_0 \in]3, 4[$, että $f(x_0) = f(2)$. Kuitenkin $2 \notin]3, 4[$, joten täytyy olla $x_0 \neq 2$. On siis löydetty kaksi eri reaalilukua (luvut x_0 ja 2), joilla funktion arvot ovat samat.

Vastaavasti tapauksissa 4. - 6. pätee $f(1) < f(3) < f(2)$. Samalla tavalla kuin edellisessä tapauksessa päätellään, että f saa arvon $f(3)$ jollakin $x_0 \in]1, 2[$, mutta koska $3 \notin]1, 2[$, niin x_0 ja 3 ovat eri pisteet.