MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 7
9. 11. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia / AK (6 sivua)

LISÄPISTEITÄ JAOSSA

Laskuharjoituksista: 4 pistettä, jos laskettu vähintään 50 tehtävää; 3 pistettä, jos laskettu alle 50 mutta vähintään 40 kpl; 2 pistettä, jos laskettu alle 40 mutta vähintään 30 kpl; ja 1 piste, jos laskettu alle 30 mutta vähintään 20 kpl syksyn tehtävistä.

Ohjauksista: 2 pistettä, jos 9. 11. alkaen on osallistunut 5 - 6 viikon ohjauksiin ja 1 piste, jos osallistunut 3 - 4 viikon ohjauksiin.

1.Oletetaan, että $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että $\lim_{x\to 1} f(2x) = 7$.

Ratkaisu: *Pohdintaa:* Oletuksesta seuraa funktion raja-arvon määritelmän nojalla, että jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti voimme valita sellaisen luvun $\delta_\varepsilon > 0$, että ehdosta $0 < |y-2| < \delta_\varepsilon$ seuraa, että

$$|f(y) - 7| < \varepsilon.$$

Näin ollen, kun valitsemme $y = 2x$ ja oletamme, että $0 < |y-2| < \delta_\varepsilon$ eli että $0 < |2x-2| < \delta_\varepsilon$, niin pätee

$$|f(y) - 7| < \varepsilon \quad \text{eli} \quad |f(2x) - 7| < \varepsilon. \tag{1}$$

Olemme löytäneet sellaisen ehdon lukujen $2x$ ja 2 väliselle etäisyydelle, josta seuraa arvio (1). Väitettä varten haluamme löytää ehdon lukujen x ja 1 väliselle etäisyydelle, mistä seuraisi arvio (1). Huomaamme, että

$$0 < |2x-2| < \delta_\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < 2|x-1| < \delta_\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < |x-1| < \frac{\delta_\varepsilon}{2}.$$

Siis, kun $0 < |x-1| < \frac{\delta_\varepsilon}{2}$, niin pätee, että

$$|f(2x) - 7| < \varepsilon.$$

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \delta_\varepsilon/2$, missä luku $\delta_\varepsilon > 0$ on sellainen, jolla ehdosta $0 < |x-2| < \delta_\varepsilon$ seuraa, että $|f(x)-7| < \varepsilon$. Luvun δ_ε olemassaolo seuraa oletuksesta. Oletetaan, että $0 < |x-1| < \delta$. Tällöin $0 < |2x-2| = 2\,|x-1| < 2 \cdot \delta = \delta_\varepsilon$, ja pätee

$$|f(2x) - 7| < \varepsilon.$$

Tämä osoittaa, että $\lim_{x\to 1} f(2x) = 7$.

2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$(a) \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

ja

$$(b) \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Entä

$$(c) \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{2+\sin x}{x-1}?$$

Ratkaisu: (a) Merkintä $x \to 1+$ tarkoittaa, että x lähestyy lukua 1 *oikealta* puolelta. Tässä tarkastelussa on siis $x > 1$ koko ajan. Tällöin $x - 1 > 0$, ja itseisarvon määritelmän mukaan $|x - 1| = x - 1$.

Tehtävämme on osoittaa, että funktion $x \mapsto \frac{1}{x-1}$, $x > 1$, arvot kasvavat rajatta, kun x lähestyy lukua 1. Täsmällisesti, osoitamme että jokaista lukua $M > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että jokaisella $x > 1$, $0 < |x - 1| < \delta$, pätee, että

$$\frac{1}{x-1} > M. \tag{2}$$

Huomautus: Ehdon $x > 1$, $0 < |x-1| < \delta$ voi lyhyesti kirjoittaa $0 < x-1 < \delta$ tai vaihtoehtoisesti $1 < x < 1 + \delta$ (x on rajattu lähelle lukua 1 ja sen oikealle puolelle).

Pohdintaa: Tutkimme, millä x:n ja luvun 1 etäisyyttä koskevalla ehdolla arvio (2) on voimassa:

$$\frac{1}{x-1} > M \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{M} > x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 1 < \frac{1}{M}.$$

Arvio (2) on siis voimassa täsmälleen silloin, kun $|x - 1| = x - 1 < -1/m$.

Todistus: Olkoon $M > 0$. Valitaan $\delta = 1/M$. Oletetaan, että $1 < x < 1 + \delta$. Tällöin $0 < x - 1 < \delta$ ja

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{1/M} = M.$$

Tämä osoittaa, että $\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty$.

(b) Merkintä $x \to 1-$ tarkoittaa, että x lähestyy lukua 1 *vasemmalta* puolelta. Tässä tarkastelussa on siis $x < 1$ koko ajan. Tällöin $x - 1 < 0$, ja itseisarvon määritelmän mukaan $|x-1| = 1 - x$.

Tehtävämme on osoittaa, että funktion $x \mapsto \frac{1}{x-1}$, $x < 1$, arvot pienenevät rajatta, kun x lähestyy lukua 1. Täsmällisesti, osoitamme että jokaista lukua $m < 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että jokaisella $x < 1$, $0 < |x-1| < \delta$, pätee, että

$$\frac{1}{x-1} < m. \tag{3}$$

Huomautus: Ehdon $x < 1$, $0 < |x-1| < \delta$ voi lyhyesti kirjoittaa $0 < 1 - x < \delta$ tai vaihtoehtoisesti $1 - \delta < x < 1$ (x on rajattu lähelle lukua 1 ja sen vasemmalle puolelle).

Pohdintaa: Tutkimme, millä x:n ja luvun 1 etäisyyttä koskevalla ehdolla arvio (3) on voimassa:

$$\frac{1}{x-1} < m \quad \overset{(A)}{\iff} \quad 1 > m(x-1) \quad \overset{(B)}{\iff} \quad \frac{1}{m} < x - 1 \quad \overset{(C)}{\iff} \quad -\frac{1}{m} > 1 - x.$$

Perusteluja:
$^{(A)}$ kerromme epäyhtälön puolittain luvulla $x - 1 < 0$
$^{(B)}$ kerromme epäyhtälön puolittain luvulla $\frac{1}{m} < 0$
$^{(C)}$ kerromme epäyhtälön puolittain luvulla $-1 < 0$

Arvio (3) on siis voimassa täsmälleen silloin, kun $|x-1| = 1 - x < -1/m$.

Todistus: Olkoon $m < 0$. Valitaan $\delta = -1/m > 0$. Oletetaan, että $1 - \delta < x < 1$. Tällöin $1 - x < \delta$ ja

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{-1/m} = m.$$

Tämä osoittaa, että $\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty$.

Huomautus: Ei ole olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}.$$

Itse asiassa, ei ole olemassa edes *toispuoleisia* raja-arvoja

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1}$$

ja

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1},$$

sillä funktion $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ arvot joko kasvavat tai pienenevät rajatta riippuen siitä, kummalta puolelta x lähestyy lukua 1.

(c) Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee, että $-1 \leq \sin x \leq 1$. Erityisesti kaikilla $x < 1$ on siis voimassa arvio $2 + \sin x \leq 3$. Siis, kaikilla $x < 1$ pätee, että

$$\frac{2 + \sin x}{x - 1} \leq \frac{3}{x - 1} = 3 \cdot \frac{1}{x - 1}.$$

(b)-kohdan nojalla pätee, että

$$\frac{1}{x - 1} < m \quad \text{aina, kun} \quad 0 < 1 - x < -\frac{1}{m}.$$

Koska $\frac{1}{x-1} < 0$ kaikilla $x < 1$, niin $3 \cdot \frac{1}{x-1} < \frac{1}{x-1}$. Siis, kun $m < 0$ on annettu, ehdosta $0 < 1 - x < -1/m$ seuraa, että

$$\frac{2 + \sin x}{x - 1} \leq \frac{3}{x - 1} = 3 \cdot \frac{1}{x - 1} < \frac{1}{x - 1} < m.$$

Tämä osoittaa, että $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{2+\sin x}{x-1} = -\infty$. Ei ole olemassa raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{2+\sin x}{x-1}$ sillä lausekkeen $\frac{2+\sin x}{x-1}$ arvot pienenevät rajatta kun x lähestyy lukua 1 vasemmalta puolelta.

Samantapaisin perusteluin voisimme osoittaa, että $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{2+\sin x}{x-1} = \infty$.

3. Käy läpi lauseen 5.6 todistus.

Lause 5.6. [Hurri-Syrjänen (1999), s. 36] *Funktiolle f on voimassa*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

aina ja vain kun

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = a = \lim_{x \to x_0 +} f(x).$$

Kommentteja: Lauseen tulos voidaan lyhyesti kirjoittaa muotoon

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 -} f(x) = a = \lim_{x \to x_0 +} f(x).$$

Lauseen $\Longrightarrow$ –suunta sanoo, että jos funktiolla on raja-arvo a kohdassa $x = x_0$, niin funktiolla on myös toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = x_0$ ja niillä on sama arvo a. Tämä vaikuttaa melko ilmeiseltä: jos funktiolla on raja-arvo kun x lähestyy lukua x_0 pitkin *mitä hyvänsä* reittiä (oikealta, vasemmalta tai "pomppien" luvun x_0 molemmin puolin) niin raja-arvo on olemassa erityisesti, kun lähestyminen tapahtuu oikealta/vasemmalta. Kirjaamme perustelun tähän koska monisteessa on todettu, että "Tämä suunta on selvä".

$\Longrightarrow$ **–suunnan perustelu:** Olkoon $\varepsilon > 0$. Funktion raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen luku $\delta_\varepsilon > 0$, että jokaisella luvulla x, joka toteuttaa ehdon $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ pätee

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

$1°$ Tarkastelemme sellaisia luvun x_0 *oikealla puolella* olevia lukuja x, jotka toteuttavat ehdon $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ eli ehdon $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$. Erityisesti näille x:ille pätee, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tämä osoittaa, että

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a$$

$2°$ Vastaavasti, tarkastelemme sellaisia luvun x_0 *vasemmalla puolella* olevia lukuja x, jotka toteuttavat ehdon $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ eli ehdon $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$. Erityisesti näille x:ille pätee, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tämä osoittaa, että

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a$$

$\Longleftarrow$ **–suunta** sen sijaan ei ole niin ilmeinen. Tähän suuntaan tulos takaa, että jo oikean ja vasemmanpuoleisten raja-arvojen olemassaolo ja sama-arvoisuus takaavat raja-arvon olemassaolon. Silloin raja-arvo on siis olemassa myös kun x lähestyy lukua x_0 ”pomppien” puolelta toiselle. Tämän suunnan todistus löytyy luentomonisteesta.

4. Todista monisteen sivun 37 lemma 5.7.

Lemma 5.7. [Hurri-Syrjänen (1999), s. 37] *Olkoon $f(x) > 0$ kaikilla x. Silloin*

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

Tässä α voi olla tyyppiä x_0, x_0+, x_0-, ∞ tai $-\infty$.

Todistus: Perustelu on periaatteeltaan sama olipa α mikä hyvänsä edellä mainituista vaihtoehdoista. Käsittelemme kaikki tapaukset yhtäaikaisesti.

$\Longrightarrow$ **–suunta:** Oletamme, että $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$. Koska $f(x) > 0$ kaikilla x, niin $|f(x)| = f(x)$. Määritelmien perusteella jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen r_ε, että $f(x) = |f(x) - 0| < \varepsilon$ aina, kun

$$\begin{aligned}
&0 < |x - x_0| < r_\varepsilon \quad \text{tapaus } \alpha = x_0;\\
&x_0 - r_\varepsilon < x < x_0 \quad \text{tapaus } \alpha = x_0-;\\
&x_0 < x < x_0 + r_\varepsilon \quad \text{tapaus } \alpha = x_0+;\\
&x > r_\varepsilon \quad \text{tapaus } \alpha = \infty;\\
&x < r_\varepsilon \quad \text{tapaus } \alpha = -\infty.
\end{aligned}$$

Tapauksissa $\alpha = x_0$, $\alpha = x_0-$ ja $\alpha = x_0+$ on lisäksi oltava $r_\varepsilon > 0$.

Koska $f(x) \neq 0$ kaikilla x, niin

$$f(x) < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Olkoon $M > 0$. Valitaan $\varepsilon = 1/M > 0$. Tällöin

$$f(x) < \frac{1}{M} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{1/M} = M$$

aina, kun

$$\begin{aligned}
&0 < |x - x_0| < r_\varepsilon \quad \text{tapaus } \alpha = x_0;\\
&x_0 - r_\varepsilon < x < x_0 \quad \text{tapaus } \alpha = x_0-;\\
&x_0 < x < x_0 + r_\varepsilon \quad \text{tapaus } \alpha = x_0+;\\
&x > r_\varepsilon \quad \text{tapaus } \alpha = \infty;\\
&x < r_\varepsilon \quad \text{tapaus } \alpha = -\infty.
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa, että

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

$\Longleftarrow$ **–suunta:** Oletamme, että $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty$. Määritelmien perusteella jokaista lukua $M > 0$ kohti on olemassa sellainen s_M, että $\frac{1}{f(x)} > M$ aina, kun

$$\begin{aligned}
&0 < |x - x_0| < s_M \quad \text{tapaus } \alpha = x_0;\\
&x_0 - s_M < x < x_0 \quad \text{tapaus } \alpha = x_0-;\\
&x_0 < x < x_0 + s_M \quad \text{tapaus } \alpha = x_0+;\\
&x > s_M \quad \text{tapaus } \alpha = \infty;\\
&x < s_M \quad \text{tapaus } \alpha = -\infty.
\end{aligned}$$

Tapauksissa $\alpha = x_0$, $\alpha = x_0-$ ja $\alpha = x_0+$ on lisäksi oltava $s_M > 0$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $M = 1/\varepsilon > 0$. Tällöin

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad f(x) < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x) - 0| < \varepsilon$$

aina, kun

$$\begin{aligned}
&0 < |x - x_0| < s_M \quad \text{tapaus } \alpha = x_0;\\
&x_0 - s_M < x < x_0 \quad \text{tapaus } \alpha = x_0-;\\
&x_0 < x < x_0 + s_M \quad \text{tapaus } \alpha = x_0+;\\
&x > s_M \quad \text{tapaus } \alpha = \infty;\\
&x < s_M \quad \text{tapaus } \alpha = -\infty.
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa, että

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0.$$

Huomautus: Lauseessa tehty oletus $f(x) > 0$ kaikilla x on oleellinen! Miksi?