MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 11
7. 12. 2009 alkavalle viikolle

Luennoilla on nyt menossa vaihe, missä Hurri-Syrjäsen monistetta käyttäen tutustutaan tärkeiden transkendenttifunktioiden perusominaisuuksiin.

Tämän jälkeen on vielä yhdet ohajukset. Niissä kerrataan koetta varten.

Varsinaisten ratkaisujen jäljessä tulee tehtäviin liittyviä kommentteja ja havaintoja, jotka ratkaisija kokee mielenkiintoisina!

1. Osoita juuren määritelmän ja potenssin (eksponenttina kokonaisluku) laskusääntöjen avulla, että kun $x > 1$, on
(a)
$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m;$$
(b)
$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}.$$

Ratkaisu: Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Luvun x n:nnäs juuri määritellään seuraavasti:

I Juuren indeksi n on parillinen luku
Parilliset juuret määritellään vain ei-negatiivisille luvuille:
Olkoot indeksi $n \in \mathbb{N}$ parillinen ja $x \geq 0$. Luvun x n:nnellä juurella $\sqrt[n]{x}$ tarkoitetaan sitä yksikäsitteistä *ei-negatiivista* lukua, jonka n:s potenssi on x. Esimerkiksi
$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{sillä} \quad 2^4 = 16 \text{ ja } 2 \geq 0.$$
Parillisen juuren määritelmä voidaan siis kirjoittaa
$$\sqrt[n]{x} = b \quad \Longleftrightarrow \quad b^n = x \text{ ja } b \geq 0.$$
Huomaa, että esimerkissämme myös luku -2 toteuttaa ehdon $(-2)^4 = 16$. Määritelmän asetuksessa on kuitenkin tehty valinta, että parillisen juuren arvo on aina ei-negatiivinen luku.

II Juuren indeksi n on pariton luku
Parittomat juuret määritellään kaikille reaaliluvuille:
Olkoot indeksi $n \in \mathbb{N}$ pariton ja $x \in \mathbb{R}$. Luvun x n:nnellä juurella $\sqrt[n]{x}$ tarkoitetaan sitä yksikäsitteistä lukua, jonka n:s potenssi on x. Esimerkiksi
$$\sqrt[3]{-64} = -4 \quad \text{sillä} \quad (-4)^3 = -64.$$
Parittoman juuren määritelmä voidaan siis kirjoittaa
$$\sqrt[n]{x} = b \quad \Longleftrightarrow \quad b^n = x.$$

a) **Väite:** $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

Todistus: Tässä $x > 1$, joten $x^m > 1$, ja juuret $\sqrt[n]{x}$ ja $\sqrt[n]{x^m}$ ovat määritellyt kaikilla indeksin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ arvoilla. Määritelmän mukaan

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \quad \Longleftrightarrow \quad [(\sqrt[n]{x})^m]^n = \sqrt[n]{x^m}.$$

Jos juuren indeksi n on parillinen, niin on lisäksi oltava $(\sqrt[n]{x})^m \geq 0$. Koska $x > 1$ ja juurifunktio (sekä potenssifunktio) on aidosti kasvava (Lause 6.10, moniste s. 45), niin $(\sqrt[n]{x})^m \geq 1$. Lisäksi potenssien laskusääntöjen nojalla

$$[(\sqrt[n]{x})^m]^n = (\sqrt[n]{x})^{mn} = [(\sqrt[n]{x})^n]^m = x^m,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa juuren määritelmästä. Olemme siis osoittaneet, että

$$[(\sqrt[n]{x})^m]^n = x^m.$$

Juuren määritelmän nojalla väite pitää paikkansa.

b) **Väite:** $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}$

Todistus: Menettelemme kuten a-kohdassa. Tässä $x > 1$, joten $x^m > 1$ ja $x^{mp} > 1$, ja juuret $\sqrt[n]{x^m}$ ja $\sqrt[np]{x^{mp}}$ ovat määritellyt kaikilla indeksien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ja $p \in \mathbb{N}$ arvoilla. Määritelmän mukaan

$$\sqrt[np]{x^{mp}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \Longleftrightarrow \quad (\sqrt[n]{x^m})^{np} = x^{mp}.$$

Jos juuren indeksi np on parillinen, niin on lisäksi oltava $\sqrt[n]{x^m} \geq 0$. Koska $x^m > 1$ ja juurifunktio on aidosti kasvava (Lause 6.10, moniste s. 45), niin $\sqrt[n]{x^m} > 1$. Lisäksi potenssien laskusääntöjen nojalla

$$(\sqrt[n]{x^m})^{np} = [(\sqrt[n]{x^m})^n]^p = (x^m)^p = x^{mp},$$

missä toinen yhtäsuuruus seuraa juuren määritelmästä. Olemme siis osoittaneet, että

$$(\sqrt[n]{x^m})^n = x^{mp}.$$

Juuren määritelmän nojalla väite pitää paikkansa.

2. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $e^x \geq 1 + x$. Tutki erotusta. Väliarvolause auttaa. (Jos aikaa jää, niin voit jatkaa seuravalla väitteellä: Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.)

Ratkaisu: Määritellään funktio $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \quad \text{kaikilla } x \geq 0,$$

missä yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun $x = 0$. Tästä voimme edetä kahdella tavalla.

Tapa 1. Lauseen 8.6. (Aidon kasvavuuden lause, moniste s. 57) nojalla funktio f on aidosti kasvava välillä $[0, \infty)$. Siis, f saa tällä välillä pienimmän arvonsa välin vasemmassa päätepisteessä:

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0 \quad \text{kaikilla } x \geq 0.$$

Näin ollen kaikilla $x \geq 0$ pätee, että

$$e^x - x - 1 \geq 0 \quad \text{eli} \quad e^x \geq 1 + x.$$

Tapa 2. Olkoon $x > 0$. Sovelletaan väliarvolausetta funktioon f välillä $[0, x]$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in]0, x[$, jolla

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)\,(x - 0) \quad \iff \quad f(x) = f'(\xi)\,x.$$

Tässä $\xi > 0$, joten $f'(\xi) > 0$. Koska myös $x > 0$, niin ja $f(x) = f'(\xi)\,x > 0$. Siis $f(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Lisäksi $f(0) = 0$, joten väite on voimassa. [Tapa 1 on kenties nopeampi tämän tehtävän väitteen perustelemiseen mutta väliarvolause tulee käyttöön myös sellaisissa tilanteissa, joissa tapa 1 ei tuota tulosta. Sekin on siis hyvä handlata. Vertaa esimerkiksi harjoitusten 11 tehtävään 6!]

Jatkoväite: $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ kaikilla $x \geq 0$.

Todistus: Määritellään funktio $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$f'(x) = e^x - x - 1.$$

Edellisen kohdan nojalla $e^x \geq 1 + x$ kaikilla $x \geq 0$, joten

$$f'(x) = e^x - x - 1 \geq 0 \quad \text{kaikilla } x \geq 0,$$

missä yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun $x = 0$.

Voisimme jälleen edetä kahdella tavalla. Valitaan tapa 1. Lauseen 8.6. (Aidon kasvavuuden lause, moniste s. 57) nojalla funktio f on aidosti kasvava välillä $[0, \infty)$. Siis, f saa tällä välillä pienimmän arvonsa välin vasemmassa päätepisteessä:

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - 0 - 0 - 1 = 0 \quad \text{kaikilla } x \geq 0.$$

Näin ollen kaikilla $x \geq 0$ pätee, että

$$e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \geq 0 \quad \text{eli} \quad e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

3. Osoita määritelmien perusteella, että

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Tässä $a > 1$ ja $x, y > 0$. Voit halutessasi tutkia (ensin) yksinkertaisempaa tapausta, missä $a = e$.

Ratkaisu: Logaritmin määritelmä on peräisin 1500–luvun loppupuolelta ja siitä on kiittäminen skotlantilaista John Napieria ja sveitsiläistä Jobst Bürgia.

Olkoot kantaluku $a > 0$, $a \neq 1$, ja x positiivinen luku. Luvun x a-kantaisella logaritmilla $\log_a x$ tarkoitetaan sitä yksikäsitteistä lukua, jonka osoittamaan potenssiin luku a on korotettava, että saataisiin x. Esimerkiksi

$$\log_2 32 = 5 \quad \text{koska} \quad 2^5 = 32.$$

Logaritmin määritelmä voidaan siis kirjoittaa

$$\log_a x = b \quad \Longleftrightarrow \quad a^b = x.$$

Määritelmästä seuraa erityisesti, että

$$\log_a a^r = r \quad \text{jokaisella } r \in \mathbb{R} \tag{1}$$

ja

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{jokaisella } x > 0. \tag{2}$$

Väite: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ kaikilla $a > 1$ ja $x, y > 0$.

Todistus: Logaritmin määritelmän mukaan

$$\log_a x = r \quad \Longleftrightarrow \quad a^r = x$$

ja

$$\log_a y = s \quad \Longleftrightarrow \quad a^s = y.$$

Näillä merkinnöillä

$$\log_a(xy) = \log_a(a^r \cdot a^s) \overset{(A)}{=} \log_a(a^{r+s}) \overset{(B)}{=} r + s.$$

Perusteluja:
(A) potenssien laskusääntö
(B) logaritmin määritelmä (seuraus (1))
Siis

$$\log_a(xy) = r + s = \log_a x + \log_a y,$$

mikä pitikin todistaa.

4. Johda funktion $\sinh x$ käänteisfunktion derivointikaava. Tutki monistetta sivuilta 84 ja 85.

Hyperboliset funktiot (hyperbelifunktiot) hyperbelisini, -kosini ja -tangentti määritellään eksponenttifunktion avulla. Nimitys viittaa näiden funktioiden yhteyteen hyperbelin kanssa. Itse asiassa hyperbelifunktiot näyttelevät tasasivuisen hyperbelin sektorien pinta-alojen laskemisessa samanlaista osaa kuin trigonometriset funktiot ympyräsektorien pinta-alojen määrityksessä. Tähän asiaan palattanee kevään kurssilla.

Hyperbolinen sinifunktio (hyperbelisini) on funktio $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}.$$

Perustelemme ensin, miksi hyperbolisella sinillä on käänteisfunktio ja johdamme käänteisfunktion määrittelevän lausekkeen:

Väite: Hyperbolinen sinifunktio on bijektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Todistus: Hyperbolinen sini on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) > 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Lauseen 8.6. (Aidon kasvavuuden lause, moniste s. 57) nojalla hyperbolinen sini on aidosti kasvava funktio. Erityisesti se on siis injektio. Osoitamme seuraavaksi, että se on myös surjektio.

Olkoon $y \in \mathbb{R}$. Osoitamme, että tällöin on olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}$, että $\sinh x = y$:

$$\begin{aligned}
\sinh x = y \quad &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad \iff e^x - e^{-x} = 2y \quad \iff \\
e^x(e^x - e^{-x}) = 2ye^x \quad &\iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \quad \iff \\
e^x &= \frac{2y \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} \\
&= y \pm \sqrt{y^2+1}.
\end{aligned}$$

Tässä $y^2 + 1 > y^2$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$, joten $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$. Näin ollen $y - \sqrt{y^2+1} < y - |y| < 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Negatiivinen ratkaisu on hylättävä sillä $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis

$$\sinh x = y \quad \iff \quad e^x = y + \sqrt{y^2+1} \quad \iff \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Olemme osoittaneet, että kun $y \in \mathbb{R}$ on annettu, niin löytyy sellainen $x \in \mathbb{R}$ – nimittäin $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ – että $\sinh x = y$. Hyperbolinen sini on tällä perusteella surjektio ja sillä on käänteisfunktio.

Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan areafunktioiksi. Hyperbolisen sinifunktion käänteisfunktio on area hyperbolinen sini (areahyperbelisini) $\operatorname{ar\,sinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Edellisessä perustelussa tulimme johtaneeksi lausekkeen, joka määrittelee area hyperbolisen sinin:

$$\operatorname{ar\,sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ jokaisella } x \in \mathbb{R}.$$

Lauseen 6.9. (käänteisfunktion monotonisuus ja jatkuvuus, moniste s. 43) nojalla area hyperbolinen sini on jatkuva ja aidosti kasvava funktio. Lauseen 7.4. (Käänteisfunktion derivoimissääntö, moniste s. 50) ja havainnon (3) nojalla se on myös derivoituva jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Voimme derivoida suoraan:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{ar\,sinh} x &= \frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)\cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

Saatiin kysytty derivointikaava.

Kommentteja tehtäviin liittyen

Tehtävä 1. Mielenkiintoinen historiallinen huomio:
Parillisen juuren arvoa koskeva valinta on historiallisesti melko uusi. Esimerkiksi *Albegran oppi- ja esimerkkikirjassa*[1] vuodelta 1965 opetetaan mm seuraavaa:

> $\sqrt[n]{a}$ *(n:s juuri a:sta) tarkoittaa lukua, jonka n:s potenssi on a. Esimerkiksi a)* $\sqrt[3]{8} = 2$ *sillä* $2^3 = 8$ *ja b)* $\sqrt{4} = 2$ *ja* -2*, sillä* $(\pm 2)^2 = 4$*. Positiivisen luvun neliöjuurella on kaksi arvoa, jotka ovat toistensa vastalukuja. Parittomilla juurilla taas on yksi arvo.*

Jäljempänä oppikirjoissa tarkastellaan juurifunktioita:

> *- - kutakin x:n arvoa vastaa kaksi, yksi tai ei yhtään funktion arvoa sen mukaan, onko x positiivinen, nolla vai negatiivinen. Funktioita, jotka voivat saada samalla muuttujan arvolla kaksi arvoa (ei useampia) sanotaan kaksikäsitteisiksi funktioiksi.*

Nykyisin tällaista ”moniarvoisuutta” ei hyväksytä funktioilla vaan funktion arvo on aina yksikäsitteinen. Lisäksi, funktion määrittelyjoukosta rajataan negatiiviset luvut pois. ”Nykyaikaisella” neliöjuurifunktiolla jokaista muuttujan x, $x \geq 0$, arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo.

Huomautus juurista ja murtopotensseista:
Koulussa olemme oppineet käyttämään merkintää

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

[1] Kalle Väisälä: Algebran oppi- ja esimerkkikirja 1, WSOY, 1965, 72–73, 88–89

missä $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ja $x \geq 0$ tai $x \in \mathbb{R}$ riippuen siitä, onko indeksi n parillinen vai pariton. Tämä merkintä ei kuitenkaan ole mielekäs siinä tapauksessa kun indeksi n on pariton ja luku x on negatiivinen!

Murtopotenssifunktio $x \mapsto x^{1/n}$ on nimittäin määritelty ainoastaan ei-negatiivisille luvuille x. Tällöin luvulla $x^{1/n}$ tarkoitetaan sitä yksikäsitteistä lukua, jonka $n:s$ potenssi on x. Esimerkiksi merkinnässä

$$\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3}$$

yhtälön vasen puoli on määritelty, se on luku -2, mutta oikea puoli on määrittelemätön.

Voisimme tietenkin määritellä, että myös $(-8)^{1/3} = -2$. Tämä määritelmä ei kuitenkaan ole mielekäs: joutuisimme joko kieltämään murtopotenssin laventamisen tai toteamaan, etteivät potenssien laskusäännöt ole voimassa murtopotensseille. Muutoin joutuisimme välittömästi ristiriitoihin. Nimittäin, jos määrittelisimme, että $(-8)^{1/3} = -2$ emmekä kieltäisi murtopotenssin laventamista sekä olettaisimme, että potenssien laskusäännöt ovat edelleen voimassa, saisimme seuraavaa:

$$-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = [(-8)^2]^{1/6} = 64^{1/6} = 2.$$

Tässä luonnollisin valinta on määritellä murtopotenssi vain ei-negatiivisille kantaluvuille. Ole siis varovainen kun käytät merkintää $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Tehtävä 2. Jatkopohdintaa
Tehtävän ideoita voidaan jatkaa eteenpäin: $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ kaikilla $x \geq 0$. Tämä perustellaan määrittelemällä funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1.$$

Derivoidaan:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1.$$

Edellisen lisäväitteen todistuksen perusteella $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$ ja yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen silloin, kun $x = 0$. Näin ollen funktio f on aidosti kasvava välillä $[0, \infty)$ ja saa tällä välillä pienimmän arvonsa kohdassa $x = 0$:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \quad \text{kaikilla } x \geq 0.$$

Tämä osoittaa, että väite on totta.

Samoja ideoita käyttäen voidaan induktiolla osoittaa, että kaikilla $x \geq 0$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k.$$