MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 10
30. 11. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Laura Tuohilampi)

1. Tutki funktion $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja, kun

$$f(x) = |(x-2)^2 - 1|$$

kaikilla $x \in [0, 7]$. Huolelliset perustelut! (Tarkista monisteesta, miten lokaaliset ääriarvot määritellään siellä.)

Ratkaisu: Tarkastellaan aluksi funktion f kulkua välillä $[0, 7]$ käyttämällä apuna lauseketta $P(x) = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$. Aloitetaan etsimällä lausekkeen $P(x)$ nollakohdat.

$$(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ tai } x = 1$$

Lausekkeen $P(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten välillä $[0, 7]$ $P(x) < 0$, kun $1 < x < 3$, ja $P(x) > 0$, kun $0 \leq x < 1$ tai kun $3 < x \leq 7$. Siis itseisarvon määritelmän nojalla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{kun } 1 < x < 3, \\ x^2 - 4x + 3, & \text{kun } 3 < x \leq 7. \end{cases}$$

Paloittain määritellyn funktion f kaikki palat on aiemmin todettu jatkuviksi ja derivoituviksi. f on siis derivoituva ainakin, kun $x \in]0, 7[$, $x \neq 1$ ja $x \neq 3$, ja derivaattafunktio on

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{kun } 0 < x < 1, \\ -2x + 4, & \text{kun } 1 < x < 3, \\ 2x - 4, & \text{kun } 3 < x < 7. \end{cases}$$

Tutkimme derivaatan nollakohtia: $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Koska f on jatkuva pisteen $x = 2$ ympäristössä $]2-r, 2+r[$, missä $0 < r < 1$ ja f on derivoituva kaikilla $x \in]2-r, 2+r[$, $x \neq 2$, ja lisäksi i) $-2x + 4 > 0$, kun $x < 2$ ja ii) $-2x + 4 < 0$, kun $x > 2$, on funktiolla f kohdassa $x = 2$ olennainen lokaali maksimikohta (lause 8.8).

Vastaavasti löydämme oleelliset lokaalit minimikohdat $x = 1$ ja $x = 3$, sillä f on jatkuva ja derivoituva näiden pisteiden ympärillä, ja
$2x - 4 < 0$, kun $1 - r < x < 1$,
$-2x + 4 > 0$, kun $1 < x < 1 + r$,
$-2x + 4 < 0$, kun $3 - r < x < 3$, ja
$2x - 4 > 0$, kun $3 < x < 3 + r$, $(0 < r < 1)$.

Oleelliset lokaalit maksimi- ja minimiarvot ovat siis $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ ja $f(3) = 0$.

Lisätietoa saamme korollaarin 8.12. avulla. Koska funktio f on jatkuva välillä $[0, 7]$ (Perustelu: $f(1) = f(3) = 0$ ja $f \to 0$, kun (1) $x \to 1_-$, (2) $x \to 1_+$, (3) $x \to 3_-$ ja (4) $x \to 3_+$), niin funktio saa suurimman ja vastaavasti pienimmän arvonsa välin päätepisteissä, derivaatan nollakohdissa tai pisteissä, joissa derivaatta ei ole määritelty. Olemme jo käsitelleet muut vaihtoehdot paitsi välin $[0, 7]$ päätepisteet.
Näissä pisteissä funktio saa arvot $f(0) = 3$ ja $f(7) = 24$. Funktion f lokaalit minimiarvot $f(1) = 0$ sekä $f(3) = 0$ ovat siis myös funktion pienimmät arvot välillä $[0, 7]$, ja funktion f suurin arvo on välin päätepisteessä $f(7) = 24$.

2. Määritä luku ξ, jolle $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$, kun
$a = 0$, $b = 1$ ja $f(x) = \sqrt{x}$.

Ratkaisu: Funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ on jatkuva, sekä derivoituva avoimella välillä $]0, \infty[$. Lisäksi

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= f'(\xi)(a - b) \\ f(b) - f(a) &= -f'(\xi)(a - b) \\ f(b) - f(a) &= f'(\xi)(b - a), \end{aligned}$$

joten väliarvolause takaa sen, että avoimella välillä $]a, b[=]0, 1[$ on olemassa halutunlainen piste ξ. Halutaan kuitenkin tarkempaa tietoa: määrittää tämä piste, eli ko. luku.
Sijoittamalla $a = 0,\ b = 1$ saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
\sqrt{0} - \sqrt{1} &= f'(\xi)(0-1) \\
-1 &= -f'(\xi) \\
f'(\xi) &= 1.
\end{aligned}
$$

Toisaalta

$$
f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ x \neq 0,
$$

joten saamme määritettyä luvun ξ ratkaisemalla yhtälön

$$
\frac{1}{2\sqrt{\xi}} = 1 \Leftrightarrow 1 = 2\sqrt{\xi} \Leftrightarrow \sqrt{\xi} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{4}.
$$

3. Oletetaan, että $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]-1,1[$ pätee, että $|f'(x)| \leq 10$. Anna esimerkki sellaisesta luvusta $\delta > 0$, että kaikilla $x, y \in]-1,1[$ pätee: jos $|x-y| < \delta$, niin $|f(x) - f(y)| < 10^{-2009}$.

Ratkaisu: Olkoon $x, y \in]-1,1[$. Oletetaan, että $x < y$ (jos $x = y$, asia on selvä, jos taas $x > y$, tilanne on oletuksen kanssa symmetrinen). Nyt $[x,y] \subset]-1,1[$, joten funktio on jatkuva välillä $[x,y]$ ja derivoituva välillä $]x,y[$. Siis väliarvolauseen nojalla on olemassa piste $\xi \in]x,y[$, jolla pätee:

$$
f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y).
$$

Tästä sekä tiedoista $\xi \in]x,y[\subset]-1,1[$ ja $|f'(x)| < 10$ kaikilla $x \in]-1,1[$ seuraa:

$$
|f(x) - f(y)| = \left|f'(\xi)(x-y)\right| = \left|f'(\xi)\right| |x-y| = \leq 10\,|x-y|\,.
$$

Edelleen

$$
10\,|x-y| < 10^{-2009} \Leftrightarrow |x-y| < \frac{10^{-2009}}{10} = 10^{-2010}.
$$

Valitaan siis $\delta = 10^{-2010} > 0$, jolloin

$$
|f(y) - f(x)| \leq 10\,|x-y| < 10 \cdot \delta = 10 \cdot 10^{-2010} = 10^{-2009}, \text{ kun } |x-y| < \delta.
$$

4. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3$ on kaikkialla määritelty käänteisfunktio $\sqrt[3]{y}$. Missä tämä on derivoituva? Käsittele kohtaa $y = 0$.

Ratkaisu: Osoitetaan aluksi, että funktio $f(x)$ on aidosti kasvava ja jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä, ja että $f\mathbb{R} = \mathbb{R}$.
Ensinnäkin, identtinen kuvaus $f(x) = x$ on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä (monisteen s. 39). Tällöin, koska $f(x) = x^3 = x \cdot x \cdot x$, on funktiomme jatkuva koko reaaliakselilla lauseen 6.3. nojalla.
Tutkitaan sitten, onko funktiomme aidosti kasvava koko $\mathbb{R}$:ssä: Muokkaamalla funktion lauseketta pisteessä $(x_0 + h)$ saamme

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= (x_0 + h)^3 \\ &= (x_0 + h)^2 (x_0 + h) \\ &= (x_0^2 + 2x_0 h + h^2)(x_0 + h) \\ &= x_0^3 + x_0^2 h + 2x_0^2 h + 2x_0 h^2 + h^2 x_0 + h^3 \\ &= x_0^3 + h3x_0^2 + h(2x_0 h + x_0 h + h^2) \end{aligned}$$

mikä voidaan kirjoittaa karakterisaatiolauseen muotoon

$$(x_0 + h)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 h + (2x_o h + x_0 h + h^2)h$$

missä $2x_0 h + x_0 h + h^2 \to 0$, kun $h \to 0$, mistä seuraa funktion f on derivoituvuus mielivaltaisessa pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ ja näin ollen kaikkialla R:ssä. Edelleen, funktion f derivaatta $f'(x) = 3x^2$.
Derivaattafunktio $f'(x) > 0$ kaikilla $x \neq 0$, ja $f'(x) = 0$ vain, kun $x = 0$, siis yksittäisessä pisteessä. Näin ollen lauseen 8.6. nojalla funktio $f(x) = x^3$ on aidosti kasvava koko $\mathbb{R}$:ssä.

Tiedämme nyt, että funktio f: $\mathbb{R} \to f\mathbb{R}$ on jatkuva (eli surjektio $\mathbb{R} \to f\mathbb{R}$) ja aidosti kasvava (eli injektio) kaikkialla määrittelyjoukossaan, joten sillä on olemassa aidosti kasvava ja jatkuva käänteisfunktio $f^{-1} : f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (lause 6.9).

Osoitetaan seuraavaksi, että käänteisfunktio on kaikkialla määritelty, eli että $f\mathbb{R} = \mathbb{R}$:

i) Olkoon $M > 0$. Valitaan x_M =max$\{1, M\}$. Tällöin $x^3 > x > M$, kun $x > x_M$. Siis $x^3 \to \infty$, kun $x \to \infty$.

ii) Olkoon $m < 0$. Valitaan x_m =min$\{-1, m\}$. Tällöin $x^3 < x < m$, kun $x < x_m$. Siis $x^3 \to -\infty$, kun $x \to -\infty$.

Ylläolevista seuraa, että $f\mathbb{R} = \mathbb{R}$, joten käänteisfunktio f^{-1} on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä, ja sen käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Alkuperäinen funktio f on derivoituva kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä ja sen derivaatta $f'(x) \neq 0$ aina, kun $x \neq 0$. Näin ollen lauseen 7.4 nojalla käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva, kun $f'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(0) \Leftrightarrow y \neq 0$, ja tämä derivaatta on $\frac{1}{f'(x)}$.
Sen sijaan, kun $y \to 0$ (oikealta tai vasemmalta), alkavat käänteisfunktiolle piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet kasvaa rajatta (tangentit alkavat ”lähestyä pystysuoruutta”), eli derivaattaa pisteessä $y = 0$ ei voi olla määritelty. Tämä tiedetään jo aiemman nojalla, sillä lauseen 7.4. mukaisesti käänteisfunktion derivaatta on olemassa vain, kun $f'(x) \neq 0$, mikä todettin yhtäpitäväksi sen kanssa, että $y \neq 0$. Tarkastellaan asiaa vielä erotusosamäärän avulla:

Kun $y = 0$, tulee erotusosamäärä muotoon

$$\frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

ja edelleen

$$\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \to \infty, \text{ kun } h \to 0$$

sillä kaikilla $M > 0$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} > M,$$

kun valitaan $|h| < \frac{1}{\sqrt{M^3}}$.

Siis käänteisfunktio on derivoituva kaikilla $y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$.