MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 10
30. 11. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Laura Tuohilampi)

Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttuja koulusta tuttujen funktioiden ominaisuuksia kuten kosinin jne. jatkuvuutta ja derivointisääntöä. Väliarvolauseesta on hyötyä monessa tehtävässä.
Osa tehtävistä muistuttaa koulutehtäviä: perustele ratkaisusi tämän kurssin lauseiden avulla.

1. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) = 7$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $x < f'(x) < 1$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$? Vihje: apufunktiosta $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ on iloa: kannattaa osoittaa, että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $g'(x) > 0$.

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Väliarvolauseen nojalla on siis olemassa luku $\xi \in]0,1[$, jolla pätee

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0) \Leftrightarrow f(1) = f'(\xi) + f(0).$$

Oletuksen mukaan $x < f'(x) < 1$ kaikilla $x \in]0,1[$. Koska $\xi \in]0,1[$, myös $f'(\xi) < 1$. Lisäksi oletuksen mukaan $f(0) = 7$. Siis

$$f(1) = f'(\xi) + f(0) < 1 + 7 = 8.$$

Apufunktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ avulla saamme lisää tietoa. Funktio g on jatkuva välillä [0,1] (kahden jatkuvan funktion erotus) ja derivoituva välillä]0,1[(kahden derivoituvan funktion erotus), joten jälleen väliarvolauseen nojalla on olemassa luku $\gamma \in]0,1[$, jolle pätee

$$g(1) - g(0) = g'(\gamma)(1-0).$$

Tässä

$$g(1) - g(0) = f(1) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - f(0) - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = f(1) - \frac{15}{2}.$$

Koska oletuksen mukaan $f'(x) > x$ kaikilla $x \in]0,1[$ ja $\gamma \in]0,1[$, niin $f'(\gamma) > \gamma$, ja

$$g'(\gamma) = f'(\gamma) - \gamma > 0.$$

Kokoamalla tiedot yhteen saamme

$$f(1) - \frac{15}{2} = g(1) - g(0) = g'(\gamma) = f'(\gamma) - \gamma > 0 \Leftrightarrow f(1) - \frac{15}{2} > 0 \Leftrightarrow f(1) > \frac{15}{2}.$$

Siis

$$7\frac{1}{2} < f(1) < 8.$$

2. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$. (Kannattaa muistaa, että $\cos 0 = 1$.)

Ratkaisu: Käsitellään erikseen tapaukset $x = 0,\ x < 0$ ja $x > 0$.

1° Oletetaan, että $x = 0$. Tällöin

$$|\cos\ x - 1| = |\cos\ 0 - 1| = |1 - 1| = 0 = |x|,$$

joten väite pätee.

2° Oletetaan, että $x < 0$. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\ x$ on jatkuva välillä $[x, 0]$ ja derivoituva välillä $]x, 0[$, joten väliarvolauseen nojalla on olemassa piste $\xi \in]x, 0[$, jolle pätee:

$$\cos\ 0 - \cos\ x = (\mathrm{D}\cos\ \xi)(0 - x) \Leftrightarrow \cos\ 0 - \cos\ x = -\sin\ \xi(0 - x) \Leftrightarrow 1 - \cos\ x = x\sin\ \xi.$$

Näin ollen

$$|\cos\ x - 1| = |1 - \cos\ x| = |x\sin\ \xi| = |x||\sin\ \xi| \leq |x|,$$

sillä $|\sin\ x| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
Siis väite pätee myös, kun $x < 0$.

3° Oletetaan, että $x > 0$. Jälleen funktio f on jatkuva välillä $[0, x]$ ja derivoituva välillä $]0, x[$. Siis väliarvolauseen nojalla on taas olemassa piste $\gamma \in]0, x[$, jolle pätee:

$$\cos\ x - \cos\ 0 = -\sin\ \xi(x - 0) \Leftrightarrow \cos\ x - 1 = -x\sin\ \xi$$

ja edelleen

$$|\cos x - 1| = |-x\sin\xi| = |-x||\sin\xi| = |-x| = |x|.$$

Väite pätee siis kaikissa kolmessa tapauksessa, eli $|\cos x - 1| \leq |x|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. $\square$

3. Oletetaan, että $a_1, \ldots, a_n$ ovat reaalilukuja. Millä x ns. neliösumma $(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$ saa pienimmän mahdollisen arvonsa?

Ratkaisu: Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = (x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Muokkaamalla funktion lauseketta saamme

$$\begin{aligned}(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2 &= x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + \ldots + x^2 - 2xa_n + a_n^2 \\ &= nx^2 - 2x(a_1 + \ldots + a_n) + a_1^2 + \ldots + a_n^2.\end{aligned}$$

Funktio f on polynomifunktio, ja siis jatkuva ja derivoituva kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä. Derivoimalla saamme

$$f'(x) = 2nx - 2(a_1 \ldots + a_n)$$

ja derivaatan nollakohdaksi saamme

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2nx - 2(a_1 \ldots + a_n) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Merkitään derivaatan nollakohtaa $x_0 = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$. Derivaatan kuvaaja on nouseva suora, joten $f'(x) < 0$, kun $x < x_0$ ja $f'(x) > 0$, kun $x > x_0$. f'-testin nojalla x_0 on funktion f lokaali minimikohta. Derivaatan merkkitarkastelun nojalla tiedämme lisäksi, että $f(x)$ on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, x_0[$ ja aidosti kasvava välillä $]x_0, \infty[$.
Funktion lokaali minimikohta $x = x_0 = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ on siis myös kohta, jossa funktio saavuttaa pienimmän arvonsa.

4. Oletetaan, että $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$. Osoita väliarvolauseen avulla, ettei funktio f ole oikealta derivoituva kohdassa $x = 0$. (Oikeanpuoleinen

derivaatta on erotusosamäärän oikeanpuolenen raja-arvo, jos sellainen on olemassa.)

Ratkaisu: Oletetaan, että $0 < h < 1$. Tällöin funktio f on jatkuva välillä $[0, h]$ ja derivoituva välillä $]0, h[$, joten väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen piste $\xi \in]0, h[$, jolla pätee:

$$f(h) - f(0) = f'(\xi)(h - 0) \Leftrightarrow \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(\xi).$$

Koska $\xi \in]0, h[$, niin $\xi \to 0+$, kun $h \to 0+$. Siis

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\xi \to 0+} f'(\xi) = \infty.$$

Näin ollen funktion erotusosamäärällä ei ole olemassa oikeanpuoleista raja-arvoa kohdassa $x = 0$, sillä $f(x) \to \infty$, kun $x \to 0+$, eikä f ole derivoituva oikealta kohdassa $x = 0$. $\square$

5. Tutki funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4 + 1}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita edellisen tehtävän tuloksen avulla, ettei f ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Tutki funktion f mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja., (Laskuja saattaa helpottaa, jos tutkitaan aluksi juurrettavaa.)

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva, sillä $x^4 + 1 \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktio f on derivoituva, kun $x \neq 0$, ja sen derivaatta on tällöin

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{x^4 + 1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x^4 + 1) \cdot 2x - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4 + 1)^2} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x(1 - x^4)}{(x^4 + 1)^{-\frac{2}{3}} (x^4 + 1)^2} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - x^4}{\sqrt[3]{x(x^4 + 1)^4}}.
\end{aligned}$$

Käytämme nyt lemmaa 5.7. apuna osoittaaksemme, että $\lim_{x \to 0+} f'(x) = \infty$: Osoitamme, että $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{f'(x)} = 0$. Ensinnäkin, kaikilla $0 < x < 1$ pätee $f'(x) > 0$. Lisäksi

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x(x^4+1)^4}}{1-x^4} \longrightarrow 0, \text{ kun } x \to 0+ .$$

Näin ollen $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \infty$, eikä f ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

Tutkitaan sitten funktion f mahdollisia suurimpia ja pieninpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja. Juurrettavaa tarkastelemalla huomaamme, että

$$\frac{x^2}{x^4+1} > 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ ja } \frac{x^2}{x^4+1} = 0, \text{ kun } x = 0.$$

Siis myös $f(x) > 0$, kun $x \neq 0$ ja $f(0) = 0$, kun $x = 0$. Näin ollen funktiolla f on pienin arvo joka on $f(0) = 0$. Tämä on samalla lokaali minimiarvo, ja $x = 0$ on lokaali minimikohta.

Etsitään lisää ääriarvokohtia derivaatan f' avulla. Ratkaisemalla tämän aiemmin löydetyn derivaattafunktion nollakohdat saamme

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^4 = 0^4 = 1 = 1 \text{ tai } x = -1.$$

Muut mahdolliset ääriarvokohdat ovat siis $x = 1$ ja $x = -1$. Selvittämällä derivaattafunktion f' merkit eri puolilla derivaatan nollakohtia sekä eri puolilla epäderivoituvuuskohtaa $x = 0$ havaitsemme (piirrä merkkikaavio, jossa tarkastelet erikseen osoittajaa, nimittäjää ja lopulta koko f':a)

i) $f'(x) > 0$, kun $x < -1$ ja $f'(x) < 0$, kun $-1 < x < 0$, joten f'-testin nojalla $x = -1$ on olennainen lokaali maksimikohta

ii) $f'(x) > 0$, kun $0 < x < 1$ ja $f'(x) < 0$, kun $1 < x$, joten f'-testin nojalla myös $x = 1$ on olennainen lokaali maksimikohta.

Lasketaan vielä funktion f arvot näissä pisteissä, jolloin saamme

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = f(1) \text{ ja } f(x) < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\},$$

joten funktiolla on suurin arvo, joka on $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. $\square$

6. Oletetaan, että $h > 0$ ja että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ jatkuva välillä $]x_0 - h, x_0 + h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0 - h, x_0[$ ja $]x_0, x_0 + h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x\to x_0-} f'(x) = \lim_{x\to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on

derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0) = A$. Vihje: sovella väliarvolausetta erotusosamäärään.

Ratkaisu: Oletetaan, että $0 < k < h$. Funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[$ on jatkuva välillä $[x_0 - k, x_0]$ ja derivoituva välillä $]x_0 - k, x_0[$, joten väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen piste $\xi \in]x_0 - k, x_0[$, jolla pätee

$$f(x_0) - f(x_0 - k) = f'(\xi)(x_0 - x_0 + k) \Leftrightarrow f(x_0) - f(x_0 - k) = f'(\xi)k.$$

Jakamalla yhtälö puolittain luvulla k ja muokkaamalla murtolauseketta saamme

$$\frac{f(x_0 - k) - f(x_0)}{-k} = f'(\xi).$$

Oletuksen mukaan $k > 0$, joten $-k < 0$. Lisäksi $\xi \in]x_0 - k, x_0[$, joten $\xi \to x_0-$, kun $-k \to 0-$. Näin ollen

$$\lim_{-k \to 0-} \frac{f(x_0 - k) - f(x_0)}{-k} = \lim_{\xi \to x_0-} f'(\xi) = A.$$

Funktiolla f on siis vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 ja tämän derivaatan arvo on $f'_-(x_0) = A$.

Toinen puoli käsitellään vastaavasti: funktio f on jatkuva välillä $[x_0, x_0 + k]$ ja derivoituva välillä $]x_0, x_0 + k[$, joten väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen piste $\gamma \in]x_0, x_0 + k[$, jolla pätee

$$f(x_0 + k) - f(x_0) = f'(\gamma)(x_0 + k - x_0) \Leftrightarrow f(x_0 + k) - f(x_0) = f'(\gamma)k.$$

Saamme taas

$$\frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} = f'(\gamma),$$

missä $\gamma \to x_0+$, kun $k \to 0+$. Näin ollen

$$\lim_{k \to 0+} \frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} = \lim_{\gamma \to x_0+} f'(\gamma) = A,$$

Funktiolla f on siis myös vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 ja tämän derivaatan arvo on $f'_+(x_0) = A$. Siis $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A$, joten f on derivoituva pisteessä x_0 ja $f'(x_0) = A$. $\square$