MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 9
23.11.2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdoituksia
$\mathbb{R}$ami Luisto
Sivuja: 5

Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttuja koulusta tuttujen funktioiden ominaisuuksia kuten sinin jne. jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

1. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = x|x|$. Millä $x$ on olemassa derivaatta $f'(x)$? Entä toinen derivaatta $f''(x)$? Entä kolmas derivaatta $f'''(x)$?

**Ratkaisu:** Aloitetaan ensimmäisestä derivaatasta ja tutkitaan eri tapauksissa.

Kun $x < 0$, niin $f(x) = x|x| = x(-x) = -x^2$, jolloin $f'(x) = -2x = 2|x|$.

Kun $x > 0$, niin $f(x) = x|x| = xx = x^2$, jolloin $f'(x) = 2x = 2|x|$.

Kun $x = 0$, niin tutkitaan erotusosamäärän raja-arvoa. Tarkastelemalla funktion $f$ kuvaajaa arvataan, että $f'(0) = 0$. Tämän voisi huomata myös siitä, että erotusosamäärä saadaan muotoon:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} - 0 = \frac{x|x| - 0|0|}{x} = \frac{\cancel{x}|x|}{\cancel{x}} = |x|,$$

joten

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} - 0 = |x| \to 0, \text{ kun } x \to 0,$$

eli $f'(0) = 0 = 2|0|$.

Eli $f'(x) = 2|x|$.

Tutkitaan seuraavaksi toista derivaattaa, taaskin eri tapauksissa.

Kun $x < 0$, niin $f'(x) = -2x$, jolloin $f''(x) = -2$.

Kun $x > 0$, niin $f'(x) = 2x$, jolloin $f''(x) = 2$.

Kun $x = 0$, niin tutkitaan taas erotusosamäärän raja-arvoa. Taas tarkastelemalla funktion kuvaajaa huomataan, että kuvaajassa on kohdassa 0 'piikki', joten derivaattaa ei luultavasti ole kyseisessä kohdassa olemassa.

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} - 0 = \frac{2|x| - 2|0|}{x} = \frac{2|x|}{x}.$$

Nyt jos $x$ lähestyy nollaa vasemmalta, on $|x| = -x$, jolloin erotusosamäärä lähenee lukua -2, mutta jos $x$ lähenee nollaa oikealta, on $|x| = x$, jolloin erotusosamäärä lähenee lukua 2. Eli:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f'(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0-} -2 = -2 \neq 2 = \lim_{x\to 0+} 2$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)-f(0)}{x}$$

Toisin sanoen $f''(0)$ ei ole olemassa.

Kolmatta derivaattaa $f'''(x)$[1] on järkevää tutkia ainoastaan, kun $x \neq 0$, sillä kuvaus $f''$ ei ole olemassa nollassa.

Kun $x < 0$, on $f''(x) = -2x$, jolloin $f'''(x) = -2$.

Kun $x > 0$, on $f''(x) = 2x$, jolloin $f'''(x) = 2$.

2. Derivoi
(a) $\sin^3 x^4$;
(b) $\sin^2(\sin^3 x^4)$;
(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}$.

**Ratkaisu:** Tässä tehtävässä käytetään paljon derivoinnin ketjusääntöä. Täytyy pysyä tarkkana, ettei laskuihin tule huolimattomuusvirheitä. Tehtävän työmäärä vähenee huomattavasti jos huomaa, että kohdissa b ja c esiintyy sisäfunktiona aiemman kohdan funktio. (Jonka on jo laskenut.)

(a) $\sin^3 x^4 = \left(\sin x^4\right)^3$:

$$D\left(\sin x^4\right)^3 = 3\left(\sin x^4\right)^2\left(D\sin x^4\right) = 3\left(\sin x^4\right)^2\left((\cos x^4)(Dx^4)\right)$$
$$= 3\left(\sin x^4\right)^2\left((\cos x^4)(4x^3)\right) = 12\left(\left(\sin^2 x^4\right)(\cos x^4)x^3\right).$$

(b) $\sin^2(\sin^3 x^4) = \left(\sin(\sin^3 x^4)\right)^2$:

$$D\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)^2 = 2\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)\left(D\sin(\sin^3 x^4)\right)$$
$$= 2\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)\left(\cos(\sin^3 x^4)\right)\overbrace{\left(D\sin^3 x^4\right)}^{(a)-\text{kohta}}$$
$$= 24\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)\left(\cos(\sin^3 x^4)\right)\left(\left(\sin^2 x^4\right)(\cos x^4)(4x^3)\right)$$

(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}$:

$$D\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1} = \frac{1}{2}\left(\left(\sin^2(\sin^3 x^4) + 1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\overbrace{\left(D\sin^2(\sin^3 x^4)\right)}^{(b)-\text{kohta}}$$
$$= 12\frac{\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)\left(\cos(\sin^3 x^4)\right)\left(\sin^2 x^4\right)(\cos x^4)(4x^3)}{\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}}$$

[1] Kun derivaatan kertaluku kasvaa, muuttuu 'pilkku-notaatio' vähän hankalalukuiseksi. (Miten mones funktion $f$ derivaatta on $f''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''$?) Tämän takia korkeamman kertaluvun derivaattoja yleensä merkitään $f^{(n)}(x)$. ($n$:s derivaatta)

3. Tarkastellaan funktiota $f :]0,2[\to]1,37[$, jolle pätee $f(x) = x^5 + x^2 + 1$ kaikilla $x \in ]0,2[$. Miksi sillä on aidosti kasvava (jatkuva) ja derivoituva käänteisfunktio $g :]1,37[\to]0,2[$. Määritä $g'(3)$. Vihje: laske ensin $f(1)$.

**Ratkaisu:** Tiedämme entuudestaan, että aidosti kasvaville, välillä määritellyille jatkuville kuvauksille löytyy aina aidosti kasvava käänteiskuvaus. Koska kuvaus $f$ on polynomifunktio, jonka olemme jo useamman kerran todistaneet jatkuvaksi, riittää meidän näyttää että kyseessä on aidosti kasvava kuvaus. Käytetään uusia työkalujamme ja tutkitaan kuvauksen derivaattaa:

$$f'(x) = 5\underbrace{x^4}_{\geq 0} + 2x \geq 5 \cdot 0 + 2\underbrace{x}_{>0} > 0$$

Nyt koska $f'(x) > 0$, niin lauseen 8.6. (aidon kasvavuuden lause) perusteella kuvaus $f$ on aidosti kasvava, ja siis myöskin injektio.

Jotta voisimme olla varmoja, että käänteiskuvaus on tosiaan määritelty koko välillä $]1,37[$, pitää meidän tarkistaa, että kuvaus $f$ on surjektio, eli että välin $]0,2[$ kuva kuvauksessa $f$ on $]1,37[$. Käytetään tähän Bolzanon lausetta. Huomataan, että kuvaus $f$ on jatkuva myös, jos määrittelemme sen olevan kuvaus $[0,2] \to [1,37]$. Nyt huomaamme, että $f(1) = 3$ ja $f(2) = 2^5 + 2^2 + 1 = 32 + 4 + 1 = 37$, niin Bolzanon lauseen perusteella kuvaus saa välillä $]0,2[$ kaikki arvot väliltä $]f(0), f(2)[=]1,37[$. Nyt siis tiedämme, että käänteiskuvaus on määritelty koko välillä $]1,37[$.

Huomasimme, että $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in ]0,2[$, joten lauseen 7.4 nojalla funktio $g$ on derivoituva, ja koska $f(1) = 1^5 + 1^2 + 1 = 3$, niin

$$g'(3) = g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{7}$$

4. Oletetaan, että $f'(1) = 2$. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Vihje: täydennä tutkittava lauseke muotoon, missä esiintyvät erotusosamäärän muodot

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{ja} \quad \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}.$$

**Ratkaisu:**

$$\begin{aligned}
&\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}\\
&=\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}\\
&=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{f(1)-f(1-2h)}{h}\\
&=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-2\frac{f(1-2h)-f(1)}{2h}\\
&=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+2\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}
\end{aligned}$$

Nyt koska oletuksen perusteella $f'(1)=2$, eli

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2,$$

jolloin myöskin

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}=2,$$

joten lauseen 5.4 perusteella

$$\lim_{h\to 0}2\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}=\left(\lim_{h\to 0}2\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\right)=4$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+2\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(2\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\right)\\
&=2+4=6
\end{aligned}$$

5. Tarkastellaan funktiota $f(x)=x^4$. Tulkitse yhtälö

$$(a+h)^4=a^4+4a^3h+6a^2h^2+4ah^3+h^4$$

karakterisaatiolauseen avulla. Mikä on tässä $f(a)$, mikä $f'(a)h$ ja mikä $h\,\varepsilon(h)$? Voidaanko funktion derivaatta kohdassa $x=a$ nähdä suoraan kyseisestä yhtälöstä?

**Ratkaisu:** Karakterisaatiolauseen mukaan derivoituva funktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\varepsilon(h)h,$$

missä $\varepsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$.

Etsitään annetusta yhtälöstä karakterisaatiolauseen yhtälöä vastaavat kohdat. Seuraavaksi vähän *epäformaalia* footnoteTämä ei siis kuvaa mitään yleistä tekniikkaa karakterisaatiolauseen soveltamisessa, vaan ihan vaan kuvastaa, miten tässä tehtävässä voisi ratkaisua esimerkiksi hakea. pohdintaa siitä, miten sopivat vastaavuudet voitaisiin löytää. Huomataan, että termissä $f(x+h)$ ei pitäisi esiintyä lukua $h$ kertoimena ja termissä $f(x)$ ei pitäisi olla lukua $h$ laisinkaan. Termiksi $f'(x)h$ kelpaa jokin, jossa on kertoimena pelkkä $h$ ja viimein termiksi $\varepsilon(h)h$ kelpaa jotain, jossa on luku $h$ kertoimena, mieluiten korkeammassa potenssissa.

$$\underbrace{(a+h)^4}_{f(a+h)} = \underbrace{a^4}_{f(a)} + \underbrace{4a^3h}_{f'(a)h} + \underbrace{6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4}_{\varepsilon(h)h}$$

Karakterisaatiolauseen perusteella siis $f'(x) = 4x^3$.

6. Oletetaan, että $p > 0$. Osoita, että yhtälöllä $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ on enintään kaksi erisuurta reaalijuurta. Vihje: Merkitse yhtälön vasen puoli $= f(x)$. Osoita ensin toisen derivaatan avulla, että $f'$ on aidosti kasvava. Sovella sitten Rollen lausetta yhtälön peräkkäisten juurten välissä.

**Ratkaisu:** Toimitaan vihjeen mukaisesti. Olkoon siis:

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r.$$

Tutkitaan nyt funktion ensimmäistä ja toista derivaattaa:

$$f'(x) = 4x^3 + 2px + q$$

$$f''(x) = 12\underbrace{x^2}_{\geq 0} + p \geq 0 + p = p > 0$$

Nyt siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee, että $f''(x) > 0$, joten lauseen 8.6. (aidon kasvavuuden lause) perusteella kuvaus $f'$ on aidosti kasvava. Koska $f'$ on aidosti kasvava, on sillä erityisesti enintään yksi nollakohta. Seuraavaksi soveltamalla Rollen lausetta huomaamme, että mikäli luvut $a$ ja $b$ ovat kuvauksen $f$ nollakohtia, eli $f(a) = f(b) = 0$, niin Rollen lauseen mukaan löytyy piste $y \in ]a, b[$ siten, että $f'(y) = 0$.

Juuria voi siis olla kuvauksella $f$ enintään kaksi, sillä mikäli löytyisivät juuret $a < b < c$, niin derivaatalle löytyisi nollakohta sekä väliltä $]a, b[$ että väliltä $]b, c[$.