MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 7 RATKAISUT Erik Ramm-Schmidt
9. 11. 2009 alkavalle viikolle

1. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 + x^2 + x}{x^2 + 7}.$$

Ratkaisu. Koska raja-arvolausekkeessa

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 + x^2 + x}{x^2 + 7} \tag{i}$$

esiintyy muun muassa termit $2x^3$ ja x^2 osoitetaan aluksi seuraava aputulos: Kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\lim_{x\to 1} ax^k = a. \tag{ii}$$

Todistus: Osoitetaan väite induktiolla. Kiinnitetään $a \in \mathbb{R}$. Voidaan olettaa tunnetuksi, että $\lim_{x\to 1} x = 1$. Tästä saadaan Lauseen 5.4.(2) nojalla

$$\lim_{x\to 1} ax = a \cdot 1 = a.$$

Yhtälö (ii) on siis tosi kun $k = 1$.

Oletetaan, että yhtälö (ii) on tosi luvulla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin saadaan Lauseen 5.4.(3) nojalla

$$\lim_{x\to 1} ax^{k+1} = \lim_{x\to 1} ax^k \cdot x = a \cdot 1 = a.$$

Induktioperiaatteen nojalla yhtälö (ii) on tosi kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

Käyttämällä tätä aputulosta ja lausetta 5.4.(1) sekä tietoa $\lim_{x\to 1} 7 = 7$ saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(2x^3 + x^2) &= 2 + 1 = 3 \\
\lim_{x\to 1}(2x^3 + x^2 + x) &= \lim_{x\to 1}((2x^3 + x^2) + x) = 3 + 1 = 4 \\
\lim_{x\to 1}(x^2 + 7) &= 1 + 7 = 8.
\end{aligned}$$

Koska raja-arvo $\lim_{x\to 1}(x^2 + 7)$ on nollasta eroava, niin lauseen 5.4 osamääriä koskevan kohdan nojalla raja-arvo (i) on olemassa ja

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 + x^2 + x}{x^2 + 7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-1}{x^3+1} = 3.$$

Todistus. Määritelmä: Luku a on funktion$f$ raja-arvo äärettömyydessä jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku M siten, että $|f(x) - a| < \varepsilon$ kun $x > M$.

Kiinnitetään aluksi mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Tehtävänä on löytää sellainen luku M, että $|\frac{3x^3-1}{x^3+1} - 3| < \varepsilon$ kun $x > M$.

Lähdetään tutkimaan erotusta $|\frac{3x^3-1}{x^3+1} - 3|$. Koska ollaan kiinnoistuneita tämän lausekkeen suurudesta kun x kasvaa rajattomasti, voidaan olettaa $x > 0$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}\left|\frac{3x^3-1}{x^3+1} - 3\right| &= \left|\frac{3x^3-1-3x^3-3}{x^3+1}\right| = \left|\frac{-4}{x^3+1}\right| \\ &= \frac{4}{x^3+1} < \frac{4}{x^3}.\end{aligned}$$

Yllä olevien valmistelujen perusteella tehdään valinta $M = \sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon}}$. Nähdään, että luku M kelpaa: jos $x > M$ niin

$$\left|\frac{3x^3-1}{x^3+1} - 3\right| < \frac{4}{x^3} < \frac{4}{M^3} = \varepsilon.$$

$\square$

3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 7-} \frac{x+7}{x-7} = -\infty.$$

Todistus. Määritelmä: Merkitään $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$, jos jokaista lukua m vastaa luku $\delta > 0$ siten, että $f(x) < m$ kun $x \in]a-\delta, a[$.

Voidaan itse asiassa olettaa $m < 0$ vaikka määritelmässä m voi olla myös ei-negatiivinen. Luku m voidaan nimittäin korvata pienemmällä luvulla $\min\{m, -1\}$. Tämä seuraa siitä, että jos $f(x) < \min\{m, -1\}$, niin myös $f(x) < m$.

Huomaa myös, että ehto $x \in]a-\delta, a[$ on yhtäpitävä ehdon $a - \delta < x < a$ kanssa.

Kiinnitetään siis aluksi luku $m < 0$. Tehtävänä on löytää sellainen luku $\delta > 0$, että $\frac{x+7}{x-7} < m$ kun $7 - \delta < x < 7$.

Lähdetään arvioimaan lauseketta $\frac{x+7}{x-7}$. Oletetaan $7 - \delta < x < 7$, missä on jokin luku $0 < \delta \leq 1$.

Koska $x < 7$, niin $x - 7 < 0$. Tekemästämme oletuksesta $x > 7 - \delta$ sekä $\delta \leq 1$ seuraa, että $x + 7 > 7 - \delta + 7 > 1$. Kertomalla epäyhtälö $x + 7 > 1$ puolittain luvulla $1/(x - 7) < 0$ saamme

$$\frac{x+7}{x-7} < \frac{1}{x-7}. \tag{1}$$

Oletuksesta $7 > x > 7 - \delta$ seuraa $0 > x - 7 > -\delta$ josta sadaan

$$\frac{1}{x-7} < \frac{1}{-\delta}. \tag{2}$$

Halutaan valita δ niin, että $\frac{1}{-\delta}$, ja siten myös lausekkeen $\frac{x+7}{x-7}$ arvo on pienempi kuin m.

Tehdään valmistelujen perusteella valinta $\delta = \min\{1, -\frac{1}{m}\}$. Tällöin $\delta \leq -m$, josta seuraa $\frac{1}{\delta} \geq -m$ josta edelleen seuraa

$$\frac{1}{-\delta} \leq m \tag{3}$$

Osoitetaan, että tämä δ kelpaa: Oletetaan $7 - \delta < x < 7$. Yhdistetään epäyhtälöt (1), (2) ja (3) ja saadaan

$$\frac{x+7}{x-7} < \frac{1}{x-7} < \frac{1}{-\delta} \leq m$$

□

4. Onko olemassa $\lim_{x\to\infty} \cos x$? Koulusta tuttuja kosinifunktion ominaisuuksia saa tietysti käyttää.

Ratkaisu. Määritelmä: Luku a on funktion f raja-arvo äärettömyydessä, merkitään $a = \lim_{x\to\infty} f(x)$ jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku M siten, että $|f(x) - a| < \varepsilon$ kun $x > M$.

Todistetaan, että raja-arvoa ei ole.

Vastaoletus: On olemassa $\lim_{x\to\infty} \cos x$. Merkitään $\lim_{x\to\infty} \cos x = a$

Kun raja-arvon määritelmässä valitaan $\epsilon = 1$ seuraa, että on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että $|\cos x - a| < 1$ kun $x > M$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ sellainen, että $2n\pi > M$. Tällöin

$$|\cos(2n\pi) - a| = |1 - a| < 1.$$

Koska myös $(2n + 1)\pi > M$, niin

$$|\cos((2n + 1)\pi) - a| = |-1 - a| = |1 + a| < 1.$$

Yhdistämällä yllä olevat epäyhtälöt saadaan

$$2 = |1 + 1| = |1 - a + a + 1| \leq |1 - a| + |1 + a| < 1 + 1 = 2$$

mikä on ristiriita.

Vastaoletus on siis epätosi, eikä raja-arvo $\lim_{x\to\infty} \cos x$ ole olemassa.

5. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määritellään jokaisella $\alpha > 0$ funktio $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $g_\alpha(x) = f(x) + \alpha x$. Oletetaan, että jokainen funktioista g_α on aidosti kasvava. Osoita, että f on kasvava.

Todistus.

Tehdään vastaoletus: funktio f ei ole kasvava.

Koska f ei ole kasvava on olemassa kaksi pistettä $x, y \in \mathbb{R}$, siten että $x < y$ ja $f(x) > f(y)$.

Toisaalta pätee $f(x) + \alpha x = g_\alpha(x) < g_\alpha(y) = f(y) + \alpha y$ kaikilla $\alpha > 0$ koska funktion g_α ovat aidosti kasvavia. Siis $f(x)+\alpha x < f(y)+\alpha y$ josta seuraa $f(x) - f(y) < \alpha(y - x)$ ja saadaan

$$\frac{f(x) - f(y)}{y - x} < \alpha \quad \text{kaikilla } \alpha > 0. \tag{1}$$

Toisaalta epäyhtälöistä $f(x) > f(y)$ ja $y > x$ seuraa $0 < \frac{f(x)-f(y)}{y-x}$. Kahden eri luvun välillä on aina olemassa kolmas luku, joten on olemassa sellainen luku α että $0 < \alpha < \frac{f(x)-f(y)}{y-x}$. Tämä on ristiriidassa kohdan (1) kanssa.

Vastaoletus on siis epätosi ja f on kasvava funktio.

6. Oletetan, että $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikilla x pätee: jos $0 < x < h$, niin $(1 - \frac{1}{7})x < f(x) < (1 + \frac{1}{7})x$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään $E(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Kun $|x|$ kyllin pieni (ja $x \neq 0$), niin $|E(x) - 1| < \frac{1}{7} \ldots$) Kannattaa piirtää kuva!

Ratkaisu. Tiedätään siis, että

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Koska $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ niin on olemassa sellainen $h > 0$, että

$$|\frac{f(x)}{x} - 1| < \frac{1}{7}$$

kun $0 < |x - 0| < h$.

Yllä oleva h kelpaa: Oletetaan $0 < x < h$. Silloin $0 < |x-0| < h$ josta seuraa

$$|\frac{f(x)}{x} - 1| < \frac{1}{7}$$

Tästä saadaan

$$-\frac{1}{7} < \frac{f(x)}{x} - 1 < \frac{1}{7}$$

josta lopulta saadaan $(1 - \frac{1}{7})x < f(x) < (1 + \frac{1}{7})x$.