

FÖRBEREDELSE INFÖR FÖRSTA KURSFÖRHÖRET

Detta är övningsmaterial inför det första kursförhøret. Provområdet är alltså grovt taget kursens början - användning av definitionen av funktioners gränsvärde. Denna samling uppgifter är avsedd att ge en tydligare bild av de viktigaste sakerna.

Det lönar sig även att repetera hem- och handledningsuppgifterna.

- (1) Skriv ner definitionen av gränsvärdet av en talföljd. Förklara med egna ord (och bild).
- (2) Vi antar att $a < b$ och $0 \leq x \leq 1$. Visa att $a \leq ax + b(1 - x) \leq b$.
- (3) Visa att $x^3 < x$ alltid när $0 < x < 1$.
- (4) Visa att $x^2 < y^2$ alltid när $0 < x < y$.
- (5) Vi antar att $9 < x < 9 + 5^{-999}$. Visa att $\sqrt{x} - 3 < 5^{-1000}$.
- (6) Vilka tal uppfyller olikheterna $|x + 1| < 2$ och $|x - 2| < 3$?
- (7) Vilka tal uppfyller ekvationen $|3x - 2| < 1$?
- (8) Vi antar att $|x - e| < 10^{-1000}$ och $|y - \pi| < 10^{-1000}$. Visa att $|xy - e\pi| < 10^{-999}$.
- (9) Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n + 3} = 3.$$

- (10) Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n + 3} = 2$$

inte stämmer.

- (11) Vi antar att talföljden x_n uppfyller villkoren $|x_n - a| < 1$ för alla n . Visa att det existerar ett tal M , för vilket $-M < x_n < M$ gäller för n .
- (12) Vi antar att följderna (x_n) och (y_n) konvergerar. Definiera $z_n = \max(x_n, y_n)$. Visa att följderna (z_n) konvergerar.
- (13) Utred gränsvärdet för talföljden x_n när

$$\frac{6 + n^3}{(n + 1)(n^2 - 2)}$$

med hjälp av lämpliga satser i kursen.

- (14) Vi antar att talföljderna (x_n) och (y_n) har följande egenskaper: för alla n gäller $|x_n| < 2$ och $y_n \rightarrow 0$ när $x_n \rightarrow \infty$. Visa att följderna $(x_n y_n)$ konvergerar.
- (15) Vi antar att $x_1 > 0$ och $x_{n+1}/x_n = 1 + 1/n$ för alla n . Visa att följderna (x_n) divergerar. Tips: skriv den högra sidan av ekvationen ovan som ett bråktal.
- (16) Vi antar att talföljden (x_n) är definierad med villkoren $x_1 = 1$ och $x_{n+1}/x_n = 1 + 1/3n^2$. Visa att följderna konvergerar. Du kan till exempel framskirda enligt följande:

- (1) Visa att följden är strängt växande.
 (2) Visa att $x_n \leq 2 - 1/n$ för varje n .
 (3) Gör slutsatser.

- (17) Vi antar att $x_n \geq 0$ för alla n och att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

- (18) Vi antar att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}.$$

- (19) Vi antar att följden (x_n) är avtagande, följden (y_n) växande och att $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$. Visa att vi för varje n har att $y_n \leq x_n$. Vad kan du säga angående följdernas konvergens eller divergens?

- (20) Vi antar att $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ när $n \rightarrow \infty$. Hur går det med uttrycket $(1 + \frac{1}{3n})^n$?

- (21) Visa att

$$\frac{n^2 + 1}{n + 1} \rightarrow \infty,$$

när $n \rightarrow \infty$.

- (22) Visa att

$$\frac{n}{3^{2n}} \rightarrow 0,$$

när $n \rightarrow \infty$.

- (23) Vi antar att $A =]1, 2[\cup]3, 4[$. (Beteckningen betyder unionen av två mängder: de punkter som hör till åtminstone en av mängderna.) Vad är $\sup A$? Vad är $\inf A$?

- (24) Vi antar att $A = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vad är $\sup A$ och $\inf A$? Varför existerar de?

- (25) Vi antar att A och B är icke-tomma uppifrån begränsade talmängder och att $a = \sup A$ och $b = \sup B$. Visa att $\sup\{x+y \mid x \in A, y \in B\} = a+b$.

- (26) (Fortsättning från föregående.) Vi antar vidare att talen i A och B positiva. Visa att $\sup\{xy \mid x \in A, y \in B\} = ab$.

- (27) Utred med hjälp av definitionen av gränsvärde

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Varför kan du anta att $x \neq 2$?

- (28) Utred $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$ och motivera ditt svar med hjälp av definitionen av gränsvärde.

(29) Visa med hjälp av definitionen av gränsvärde att

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x - 1} = 2.$$