INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 1
14.9.-18.9. 2009

Välkomna till kursen *Analys I.*

I dessa uppgifter övar vi en exakt användning av räkneregler och olikheter för reella tal. I lösningarna bör man inte hänvisa till gränsvärden, kontinuitet eller derivator (eftersom vi håller på med att lära oss de mera fundamentala fakta som krävs för en exakt behandling av dessa begrepp). Man bör sträva till att motivera lösningarna med tillräcklig noggrannhet så att också bordsgrannen m.fl. förmår acceptera det som påstås.

1. Det inversa talet till talet x är det entydiga tal y för vilken $xy = 1$. Varför har talet 0 inget inverst tal; dvs. varför är division med noll inte tilllåtet?

2. Anta att $x < 3$ och $y \leq 2$. Gäller det då nödvändigtvis att $xy < 6$? Hur motiverar du ditt svar? Du kan fritt använda de egenskaper för olikheter med reella tal som man gått igenom på föreläsningarna (eller i kompendiet).

3. Gäller följande påståenden?
(a) $x^2 < x$ alltid då $0 < x < 1$?
(b) $x < x^2$ alltid då $1 < x$?
(c) $x^2 < y^2$ alltid då $x < y$?
(d) $x^2 < y^2$ alltid då $0 < x < y$?
Försök att motivera ditt svar med hjälp av de egenskaper för olikheter som behandlats på föreläsningarna (eller i kompendiet).

4. Gäller olikheten $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ då $0 \leq x < y$? Förutom egenskaperna hos olikheter för reella tal får man även använda det faktum att om $a \geq 0$, så är $\sqrt{a}$ det entydiga icke-negativa tal vars kvadrat $(\sqrt{a})^2 = a$.

5. Sök ett sådant positivt reellt tal k att för varje $x > 1$ gäller

$$0 < \frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3} < k(x-1)$$

Tips. Modifiera skillnaden $\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}$ på ett lämpligt sätt och notera att en kvot av två positiva tal växer då nämnaren görs mindre.

6. Anta att $2 < x < 2 + 5^{-1000}$. Visa att $4 < x^2 < 4 + 5^{-999}$. *Tips.* Notera att antagandet är ekvivalent med det faktum att $0 < x-2 < 5^{-1000}$ och påståendet med $0 < x^2 - 4 < 5^{-999}$. Skriv $x^2 - 4$ som en produkt. I uppgiften får man använda att $5^{-1000} < 1$.