MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 4
5. 10. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (8 sivua) (Santeri Miihkinen)

Laskuharjoituksista saa 4 pistettä, jos laskettu vähintään 50 tehtävää; 3 pistettä, jos laskettu alle 50 mutta vähintään 40 kpl; 2 pistettä, jos laskettu alle 40 mutta vähintään 30 kpl; ja 1 piste, jos laskettu alle 30 mutta vähintään 20 kpl syksyn tehtävistä.

Ohjauksista saa lisäpisteiä, jos osallistuu ahkerasti 2. periodin ohjauksiin. Tästä ilmoitetaan tarkemmin myöhemmin.

Kertaa tarvittaessa induktiota ja rekursiota koskevia tietoja.

1. Selvitä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2-3)(3n^2-2)}{(n+1)(n^3+3)}$$

Ratkaisu. Lähdetään liikkeelle muokkaamalla lauseketta

$$\frac{(2n^2-3)(3n^2-2)}{(n+1)(n^3+3)} = \frac{n^2(2-\frac{3}{n^2})n^2(3-\frac{2}{n^2})}{n(1+\frac{1}{n})n^3(1+\frac{3}{n^3})} = \frac{n^4(2-\frac{3}{n^2})(3-\frac{2}{n^2})}{n^4(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^3})}$$
$$= \frac{(2-\frac{3}{n^2})(3-\frac{2}{n^2})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^3})}.$$

Tarkoituksena on nyt käyttää luentomonisteen Lauseen 4.7. kohtia (1), (3) ja (4) raja-arvon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2-\frac{3}{n^2})(3-\frac{2}{n^2})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^3})} \qquad (*)$$

olemassaolon osoittamiseen ja sen laskemiseen. Tässä ratkaisussa oletetaan tunnetuksi vain raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a = a$ jokaisella $a \in \mathbb{R}$. Koska raja-arvolausekkeessa (*) esiintyy muun muassa termit $\frac{3}{n^2}$, $\frac{2}{n^2}$, $\frac{1}{n}$ ja $\frac{3}{n^3}$, osoitetaan ensin pieni aputulos: Jokaisella $r \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n^k} = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin arvion $n^k \geq n$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$ perusteella pätee:

$$\left|\frac{r}{n^k} - 0\right| = \frac{|r|}{n^k} \leq \frac{|r|}{n} < \varepsilon,$$

kun $n > \frac{|r|}{\varepsilon}$. Voidaan siis valita $n_\varepsilon \geq \frac{|r|}{\varepsilon}$, jolle $\frac{|r|}{n^k} \leq \frac{|r|}{n} < \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$. Käyttämällä tätä aputulosta ja Lausetta 4.7.(1) sekä tietoa $\lim_{n\to\infty} a = a$ jokaisella $a \in \mathbb{R}$ saadaan

$$\lim_{n\to\infty}(2 - \frac{3}{n^2}) = 2 + 0 = 2$$
$$\lim_{n\to\infty}(3 - \frac{2}{n^2}) = 3 + 0 = 3$$
$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1 + 0 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{3}{n^3}) = 1 + 0 = 1.$$

Koska Lauseen 4.7.(3) nojalla pätee

$$\lim_{n\to\infty}[(2 - \frac{3}{n^2})(3 - \frac{2}{n^2})] = \lim_{n\to\infty}(2 - \frac{3}{n^2}) \lim_{n\to\infty}(3 - \frac{2}{n^2}) = 2 \cdot 3 = 6$$

ja

$$\lim_{n\to\infty}[(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{3}{n^3})] = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{3}{n^3}) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

sekä termit $(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{3}{n^3})$ ovat aina nollasta eroavia, niin raja-arvo (*) on olemassa ja voimme käyttää sen laskemiseen Lausetta 4.7.(4):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2 - \frac{3}{n^2})(3 - \frac{2}{n^2})}{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{3}{n^3})} = \frac{\lim_{n\to\infty}[(2 - \frac{3}{n^2})(3 - \frac{2}{n^2})]}{\lim_{n\to\infty}[(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{3}{n^3})]} = \frac{6}{1} = 6.$$

2. Määritellään $x_n = \frac{1}{n}\sin^7 n^7$ Osoita, että $x_n \to 0$ kun $n \to \infty$
(a) suoraan määritelmän perusteella;
(b) Lauseen 4.11 avulla.
Tehtävässä saat käyttää kaikkea koulussa sinifunktiosta oppimaasi.

Ratkaisu. (a) Palautetaan aluksi mieleen tieto: $|\sin x| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ eli $-1 \leq \sin x \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Käytetään tätä ja itseisarvon ominaisuutta

$|x^n| = |x|^n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ väitteen osoittamisessa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Havaitaan, että

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n}|\sin^7 n^7| = \frac{1}{n}|\sin n^7|^7 \leq \frac{1}{n}$$

kaikilla n. Nyt siis pätee $|x_n| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, kun $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Voidaan siis valita luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Näin ollen saadaan

$$|x_n| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$. Siispä pätee $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(b) Kohdassa (a) havaittiin $|x_n| \leq \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämä on itseisarvolemman nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että $-\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Haluamme nyt käyttää "kuristuslausetta" (Lause 4.11.) väitteen osoittamiseen. Määritellään tätä varten lukujonot $y_n = -\frac{1}{n}$ ja $z_n = \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt siis pätee $y_n \leq x_n \leq z_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = 0 = \lim_{n\to\infty} z_n$, joten Lauseen 4.11. perusteella on voimassa $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

3. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2+3k} - \sqrt{k^2}) = \frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Osoitetaan tehtävän väite tuttuun tapaan lukujonon raja-arvon määritelmän avulla. Lähdetään aluksi muokkaamaan lauseketta $|\sqrt{k^2+3k} - \sqrt{k^2} - \frac{3}{2}|$ lavennustempun avulla ja arvioimaan ylöspäin.

$$\left|\sqrt{k^2+3k} - \sqrt{k^2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{(\sqrt{k^2+3k})^2 - (\sqrt{k^2})^2}{\sqrt{k^2+3k} + \sqrt{k^2}} - \frac{3}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{k^2+3k-k^2}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2}} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3k}{\sqrt{k^2+3k}+k} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3k}{\sqrt{k^2(1+\frac{3}{k})}+k} - \frac{3}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{3k}{k\sqrt{1+\frac{3}{k}}+k} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3k}{k(\sqrt{1+\frac{3}{k}}+1)} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{k}}+1} - \frac{3}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{6-3(\sqrt{1+\frac{3}{k}}+1)}{2(\sqrt{1+\frac{3}{k}}+1)}\right| < \left|\frac{3-3\sqrt{1+\frac{3}{k}}}{2(0+\frac{1}{2})}\right| = 3\left|1-\sqrt{1+\frac{3}{k}}\right|.$$

Nyt huomataan, että alkuperäinen lauseke $\left|\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2}-\frac{3}{2}\right|$ saadaan pieneksi, jos lauseke $3\left|1-\sqrt{1+\frac{3}{k}}\right|$ saadaan pieneksi. Tehdään tämä päätelmä täsmällisesti. Olkoon $\varepsilon > 0$ kiinnitetty. Jälleen lavennustempun avulla havaitaan

$$3\left|1-\sqrt{1+\frac{3}{k}}\right| = 3\left|\frac{1-\left(\sqrt{1+\frac{3}{k}}\right)^2}{1+\sqrt{1+\frac{3}{k}}}\right| = 3\left|\frac{-\frac{3}{k}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{k}}}\right| = \frac{\frac{9}{k}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{k}}}$$

$$< \frac{\frac{9}{k}}{1+0} = \frac{9}{k} < \varepsilon,$$

kun $k > \frac{9}{\varepsilon}$. Voidaan siis valita luonnollinen luku $k_\varepsilon \geq \frac{9}{\varepsilon}$ ja pätee siis

$$\left|\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2}-\frac{3}{2}\right| < 3\left|1-\sqrt{1+\frac{3}{k}}\right| < \frac{9}{k} < \varepsilon,$$

kun $k > k_\varepsilon$. Siis on osoitettu $\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2}) = \frac{3}{2}$.

4. Oletetaan, että jono (x_n) on laskeva, jono (y_n) on nouseva, ja että kaikilla n pätee $y_n \leq x_n$. Osoita, että molemmat jonot suppenevat. (Vihje: voit osoittaa, että jono (x_n) on alhaalta rajoitettu ja jono (y_n) on ylhäältä rajoitettu.)

Ratkaisu. Osoitetaan ensin jono (x_n) alhaalta rajoitetuksi. Tähän riittää siis löytää mikä tahansa luku $M \in \mathbb{R}$, jolle $x_n \geq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näytetään, että $x_n \geq y_1$ jokaisella n. Olkoon $n \geq 1$. Tällöin tehtävän oletuksen nojalla $x_n \geq y_n$. Toisaalta jono (y_n) on nouseva, joten pätee $y_1 \leq y_n$. Näin ollen saadaan $x_n \geq y_1$. Koska jono (x_n) on laskeva ja alhaalta rajoitettu, niin Lauseen 4.9. nojalla se suppenee.

Osoitetaan sitten jono (y_n) ylhäältä rajoitetuksi. Tähän riittää siis löytää mikä tahansa luku $M' \in \mathbb{R}$, jolle $y_n \leq M'$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näytetään, että $y_n \leq x_1$ jokaisella n. Koska jono (x_n) on laskeva, niin on voimassa $x_n \leq x_1$ kaikilla n. Toisaalta tiedetään $y_n \leq x_n$, joten saadaan $y_n \leq x_1$ kaikilla n. Nyt jono (y_n) on nouseva ja ylhäältä rajoitettu, joten se suppenee Lauseen 4.8. nojalla.

5. Osoita, että on olemassa reaaliluku $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$ ja että $a^2 = 5$.

Ratkaisu. Tässä tehtävässä osoitetaan luvun $\sqrt{5}$ olemassaolo (tai itseasiassa minkä tahansa positiivisen luvun b neliöjuuren olemassaolo korvaamalla luku 5 luvulla b). Tämän vuoksi emme luonnollisesti oleta neliöjuurta tunnetuksi vaan käytämme todistuksessa ainoastaan tulon, summan ja järjestysrelaation (epäyhtälöiden) ominaisuuksia.

Määritellään aluksi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$. Todetaan ensin joukko A epätyhjäksi ja ylhäältä rajoitetuksi, jolloin täydellisyysaksiooman nojalla $a = \sup A$ on olemassa. Havaitaan välittömästi $1 \in A$. Olkoon $x \in A$. Jos olisi $x > 3$, niin pätisi $x^2 > 3^2 = 9 > 5$, mikä ei ole mahdollista joukon A määritelmän nojalla. Siispä on voimassa $x \leq 3$ jokaisella $x \in A$, joten joukko A on ylhäältä rajoitettu. Näin ollen pienin yläraja a on olemassa ja $a \geq 1$.

Nyt on kolme vaihtoehtoa: $a^2 < 5$ tai $a^2 = 5$ tai $a^2 > 5$. Osoitetaan, että vaihtoehdoista $a^2 < 5$ ja $a^2 > 5$ seuraa ristiriita, jolloin täytyy olla voimassa $a^2 = 5$.

Oletetaan ensin $a^2 < 5$. Etsitään niin pieni luku $h > 0$, että

$$a^2 < (a+h)^2 < 5.$$

Voimme etsiä lukua h vaikkapa väliltä $]0,1[$ eli vaatia $0 < h < 1$. Tämä helpottaa lausekkeiden arviointia tulevissa epäyhtälöissä. Lähdetään arvioimaan lauseketta $(a+h)^2$. Koska oletamme $0 < h < 1$, niin $h^2 < h$ ja saadaan

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 < a^2 + 2ah + h = a^2 + (2a+1)h < 5,$$

kun $h < \frac{5-a^2}{2a+1}$. Siis jos valitsemme luvun $0 < h < \min(1, \frac{5-a^2}{2a+1})$, niin erityisesti pätee $(a+h)^2 < 5$. Tällöin havaitaan, että luku $a+h > 0$ on joukon A alkio, joka on suurempi kuin pienin yläraja a. Tämä on ristiriita, joten vaihtoehto $a^2 < 5$ ei ole mahdollinen.

Oletetaan seuraavaksi $a^2 > 5$. Etsitään nyt sellainen pieni luku $h > 0$, että on voimassa

$$5 < (a-h)^2 < a^2.$$

Tavoitteena on saada aikaan ristiriita näyttämällä luku $a-h$ joukon A ylärajaksi. Koska jokainen $x \in A$ on positiivinen, niin on joukon A ylärajankin oltava positiivinen. Tämän takia vaaditaan luvulta h nyt $0 < h < 1$, jotta $a - h \geq 1 - h > 0$. Lähdetään arvioimaan lauseketta $(a-h)^2$.

$$(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 > a^2 - 2ah > 5 \Leftrightarrow a^2 - 5 > 2ah \Leftrightarrow h < \frac{a^2-5}{2a}.$$

Jos siis valitsemme $0 < h < \min(1, \frac{a^2-5}{2a})$, niin pätee $5 < (a-h)^2 < a^2$. Jos luvulle $x \in A$ pätee $x > a - h > 0$, niin saataisiin $5 < (a-h)^2 < x^2$, mikä ei ole mahdollista. Siispä pätee $x \leq a - h$ kaikilla $x \in A$ eli luku $a - h$ on joukon A yläraja. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että luku $a - h$ on pienempi yläraja kuin joukon pienin yläraja a. Siis myöskään vaihtoehto $a^2 > 5$ ei ole mahdollinen. Näin ollen pätee $a^2 = 5$.

6. Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että jonon (x_n) raja-arvo on $\sqrt{5}$, jos $x_1 = 3$ ja kaikilla n pätee

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n}).$$

Lisäkysymyksiä (ei vaadita tehtävän ruksaamiseen): (a) Osaatko selittää, miksi jono näyttää suppenevan nopeasti? (b) Osaatko antaa esimerkkiä indeksistä n jolle $|x_n - \sqrt{5}| < 10^{-100}$?

Ratkaisu. Tämän tehtävän ideana on havainnollistaa luvun $\sqrt{5}$ likiarvon laskemista annetulla palautuskaavalla, jolla määritelty jono suppenee nopeasti lukuun $\sqrt{5}$. Osoitetaan jono (x_n) laskevaksi ja alhaalta rajoitetuksi, jolloin se suppenee Lauseen 4.9. nojalla. Tämän jälkeen voimme laskea raja-arvon palautuskaavan avulla. Havaitaan aluksi, että jonon jäsen x_{n+1} on lukujen x_n ja $\frac{5}{x_n}$ keskiarvo eli sijaitsee niiden puolivälissä. Jos luku x_n on suurempi kuin luku $\frac{5}{x_n}$, niin erityisesti se on lukua x_{n+1} suurempi. Jos tämä pätee jokaisella n, on jono (x_n) laskeva.

Tehdään kaksi havaintoa, joita tarvitsemme väitteen osoittamisessa. Oletetaan luku x positiiviseksi, jotta kohdassa (1) on voimassa ekvivalenssi.

$$(1)\ x > \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{5}{x} < \sqrt{5}$$
$$(2)\ x > \sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x}) > \sqrt{5}.$$

Todetaan nämä havainnot paikkansa pitäviksi.

$$(1)\ x > \sqrt{5} \Rightarrow \frac{5}{x} < \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$
$$\frac{5}{x} < \sqrt{5} \Rightarrow 5 < \sqrt{5}x \Rightarrow x > \sqrt{5}.$$

Jos oletetaan $x > \sqrt{5}$, niin saadaan

$$(2)\ \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x}) > \sqrt{5} \Leftrightarrow x + \frac{5}{x} > 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + 5 < 2\sqrt{5}x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 > 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})^2 > 0.$$

Palataan nyt tarkastelemaan jonoa (x_n). Osoitetaan induktiolla väite: $x_n > \sqrt{5}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Perusaskel: Väite pätee tapauksessa $n = 1$, sillä $x_1 = 3 > \sqrt{5}$. Tehdään induktio-oletus: Väite $x_k > \sqrt{5}$ pätee jollakin $k \geq 1$. Nyt kohdan (2) perusteella on voimassa $x_{k+1} > \sqrt{5}$, joten induktioperiaatteen nojalla $x_n > \sqrt{5}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti jono (x_n) on alhaalta rajoitettu luvulla $\sqrt{5}$. Nyt kohdan (1) nojalla jokaisella n on voimassa $\frac{5}{x_n} < \sqrt{5} < x_n$, joten luvun x_{n+1} ollessa lukujen $\frac{5}{x_n}$ ja x_n keskiarvo pätee erityisesti $x_{n+1} < x_n$ jokaisella n. Siispä jono (x_n) on laskeva. Nyt Lauseen 4.9. nojalla se suppenee ja epäyhtälön säilymisen periaatteen nojalla (Lause 4.5.) on voimassa $a = \lim_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{5}$. Käytetään nyt rekursiokaavaa raja-arvon a laskemiseksi: Koska on voimassa $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$, niin ottamalla raja-arvo rekursiokaavassa saadaan

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n}) \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a + \frac{5}{a}) \Leftrightarrow 2a = a + \frac{5}{a}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{5}{a} \Leftrightarrow a^2 = 5 \Leftrightarrow a = \sqrt{5},$$

missä viimeinen ekvivalenssi seuraa tiedosta $a \geq \sqrt{5}$. Siis on osoitettu, että jono (x_n) suppenee ja sen raja-arvo on $\sqrt{5}$. Vastataan vielä esitettyihin kysymyksiin.

(a) Vaikka olemme osoittaneet raja-arvon olemassaolon, se ei luonnollisesti vielä kerro jonon suppenemisnopeudesta. Jatketaan jonon (x_n) tarkastelua. Jos tiedämme jotain siitä, kuinka paljon lähempänä jonon jäsen x_{n+1} on raja-arvoa $\sqrt{5}$ kuin edellinen jäsen x_n, voimme ehkä sanoa jotain suppenemistahdista. Lähdetään siis tarkastelemaan etäisyyttä $|x_{n+1} - \sqrt{5}|$ ja yritetään verrata sitä etäisyyteen $|x_n - \sqrt{5}|$. Koska pätee $x_n > \sqrt{5}$, niin itseisarvoja ei tarvita:

$$x_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n}) - \sqrt{5} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{5}x_n + 5}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{5})^2}{2x_n}$$
$$< \frac{(x_n - \sqrt{5})^2}{2\sqrt{5}} < \frac{(x_n - \sqrt{5})^2}{4}.$$

Olemme siis osoittaneet

$$x_{n+1} - \sqrt{5} < \frac{(x_n - \sqrt{5})^2}{4}. \tag{1}$$

Tästä voidaan jo päätellä jotakin tarkastelemalla epäyhtälön (1) oikeata puolta. Kun pätee $(x_n - \sqrt{5}) < 1$, niin toinen potenssi pienentää tätä etäisyyttä entisestään (tarkkuus likimain kaksinkertaistuu: Esimerkiksi jos $x_n - \sqrt{5} = 10^{-m}$ jollakin $m \geq 1$, niin $x_{n+1} - \sqrt{5} < 10^{-2m}$). Lisäksi termiä $(x_n - \sqrt{5})^2$ skaalataan kertoimella $\frac{1}{4}$. Nämä kaksi seikkaa perustelevat nopeaa suppenemistahtia, joka havainnollistuu (b)-kohdassa.

(b) Käyttämällä kohdan (a) arviota (1) havaitaan laskemalla seuraavaa:

$$\begin{aligned}
x_1 - \sqrt{5} &= 3 - \sqrt{5} < 3 - 2 = 1 \\
x_2 - \sqrt{5} &< \frac{(x_1 - \sqrt{5})^2}{4} < \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{2^2-2}} \\
x_3 - \sqrt{5} &< \frac{(x_2 - \sqrt{5})^2}{4} < \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{2^{2^3-2}}.
\end{aligned}$$

Osoitetaan induktion avulla:

$$x_n - \sqrt{5} < 2^{-(2^n-2)}$$

kaikilla $n \geq 1$. Tapaus $n = 1$ on selvä, sillä $2^{-(2^1-2)} = 1$. Tehdään induktio-oletus: $x_k - \sqrt{5} < 2^{-(2^k-2)}$ jollakin $k \geq 1$. Tällöin pätee käyttämällä arviota (1) ja induktio-oletusta:

$$x_{k+1} - \sqrt{5} < \frac{(x_k - \sqrt{5})^2}{4} < 2^{-2}2^{-2(2^k-2)} = 2^{-2}2^{(-2^{k+1}+4)} = 2^{-(2^{k+1}-2)}.$$

Siis induktioperiaatteen nojalla pätee $x_n - \sqrt{5} < 2^{-(2^n-2)}$ kaikilla n. Nyt kokeilemalla arvoa $n = 9$ havaitaan

$$x_9 - \sqrt{5} < 2^{-(2^9-2)} = 2^{-510} < 2^{-400} = 16^{-100} < 10^{-100}.$$

Siis indeksi $n = 9$ kelpaa vastaukseksi (b)-kohdan kysymykseen.