MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 4
5. 10. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (6 sivua)(Santeri Miihkinen)

1. Selvitä lauseen 4.7 avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+7}{(n+2)(n+4)}$$

Muista lauseen "jos, niin" -rakenne! Tehtävässä saa pitää tunnettuna, että $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu. Muokataan aluksi lauseketta

$$\frac{3n^2+5n+7}{(n+2)(n+4)} = \frac{n^2(3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2})}{n(1+\frac{2}{n})n(1+\frac{4}{n})} = \frac{3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})}.$$

Nyt Lauseen 4.7. nojalla pätee

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n})^2 = 0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 7 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 7 \cdot 0 = 0.$$

Edelleen on voimassa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ja samalla tavalla saadaan $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$. Käyttämällä edellisiä raja-arvoja johdetaan

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n}) = 1+0 = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{4}{n}).$$

Näin ollen saadaan

$$\lim_{n\to\infty} (3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}) = 3+0+0 = 3$$
$$\lim_{n\to\infty} [(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})] = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n}) \lim_{n\to\infty} (1+\frac{4}{n}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Koska termi $(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})$ on nollasta eroava jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})] = 1 \neq 0$, niin käyttämällä vielä kerran Lausetta 4.7. saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})]} = 3.$$

2. Oletetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

ja että $a \neq 0$.

Osoita, että on olemassa sellainen kokonaisluku K, että kaikilla $n > K$ pätee $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$. Tehtävä on erityisen "läpinäkyvä", jos tarkastellaan erikseen tapauksia $a < 0$ ja $a > 0$.

Ratkaisu. 1. tapa:

Lähdetään liikkeelle lukujonon raja-arvon määritelmästä ja ei oleteta luvusta a vielä muuta kuin $a \neq 0$. Lukujonon suppenemisen määritelmän nojalla siis tiedetään, että jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$. Ideana on valita luku $\varepsilon > 0$ niin pieneksi, että indeksistä $n_\varepsilon = K$ eteenpäin jonon jäsenet x_n ovat niin lähellä lukua a, että pätee $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}|a| > 0$ ($a \neq 0 \Leftrightarrow |a| > 0$.) Tällöin on olemassa luku $K > 0$, jolle pätee siis

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}|a|,$$

aina kun $n > K$. Tämä on itseisarvolemman nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että $-\frac{1}{2}|a| < x_n - a < \frac{1}{2}|a|$, kun $n > K$ eli

$$a - \frac{1}{2}|a| < x_n < \frac{1}{2}|a| + a, \tag{1}$$

kun $n > K$.

Tarkastellaan nyt erikseen tapaukset $a < 0$ ja $a > 0$. Oletetaan ensin $a < 0$. Nyt on voimassa $\frac{1}{2}|a| = -\frac{1}{2}a$. Näin ollen katsomalla epäyhtälöketjun (1) oikeanpuoleista epäyhtälöä saadaan

$$x_n < \frac{1}{2}|a| + a = -\frac{1}{2}a + a = \frac{1}{2}a < 0, \tag{2}$$

kun $n > K$. Tämän perusteella pätee (kertomalla epäyhtälö (2) puolittain luvulla -1)

$$|x_n| = -x_n > -\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}|a|,$$

kun $n > K$.

Katsotaan sitten tapausta $a > 0$. Nyt pätee $\frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}a$. Tarkastelemalla epäyhtälöketjun (1) vasenta epäyhtälöä havaitaan

$$x_n > a - \frac{1}{2}|a| = a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a > 0,$$

kun $n > K$. Näin ollen pätee siis

$$|x_n| = x_n > \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}|a|,$$

kun $n > K$.

2. tapa:

Käytetään tässä ratkaisussa apuna kolmioepäyhtälön vasenta puolta:

$$||a| - |b|| \leq |a + b|$$

kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}|a| > 0$. Nyt on siis olemassa luku $K > 0$, jolle pätee

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}|a|,$$

kun $n > K$ ja kolmioepäyhtälön nojalla siis

$$||x_n| - |a|| = ||x_n| - |-a|| \leq |x_n + (-a)| < \frac{1}{2}|a|,$$

kun $n > K$. Siis saatiin

$$||x_n| - |a|| < \frac{1}{2}|a|,$$

kun $n > K$. Itseisarvolemman nojalla pätee edelleen

$$|a| - \frac{1}{2}|a| < |x_n| < |a| + \frac{1}{2}|a|,$$

kun $n > K$, missä vasen epäyhtälö on haluttu tulos:

$$|x_n| > |a| - \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}|a|,$$

kun $n > K$.

3. Osaatko todistaa, että seuraava jono suppenee:

$$1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \ldots ?$$

(Tehtävässä on itse asiassa kyse kurssin analyysi II sarjateorian osaan kuuluvan Leibnizin lauseen erikoistapauksesta.) Tehtävää voi lähestyä esim. tarkastelemalla ensin jonoja $x_1, x_3, \ldots$ ja $x_2, x_4, \ldots$. Tässä tehtävässä saa käyttää hyväksi tietoa, että jokainen nouseva (ts. kasvava) ylhäältä rajoitettu ja jokainen laskeva (ts. vähenevä) alhaalta rajoitettu jono suppenee.

Ratkaisu. Tehtävän jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jäsenet on määritelty kaavalla

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Edellä on käytetty summamerkintää $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$, joka tulee tutummaksi kurssissa Analyysi II. Lähdetään tutkimaan vihjeen mukaisesti osajonoja $x_1, x_3, ...$ ja $x_2, x_4, ...$. Merkitsemme näitä jonoja vastaavasti $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ ja $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$. Osoitetaan ensin jono $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ laskevaksi ja jono $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ nousevaksi. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
&x_{2n-1} - x_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{2n}\frac{1}{2n-1}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{2n}\frac{1}{2n-1}\right. \\
&\left. + (-1)^{2n+1}\frac{1}{2n} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} > 0
\end{aligned}$$

eli saadaan $x_{2n-1} > x_{2n+1}$ jokaisella n. Siis jono $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ on laskeva. Vastaavasti havaitaan

$$\begin{aligned}
&x_{2n} - x_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{2n+1}\frac{1}{2n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+1}\right. \\
&\left. + (-1)^{2n+3}\frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0
\end{aligned}$$

eli saadaan $x_{2n} < x_{2n+2}$ jokaisella n. Näin ollen jono $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ on kasvava. Näytetään sitten jono $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ alhaalta rajoitetuksi luvulla x_2 eli $x_{2n-1} \geq x_2$ kaikilla n ja jono $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ ylhäältä rajoitetuksi luvulla x_1 eli $x_{2n} \leq x_1$ kaikilla n. Havaitaan ensin jonon (x_n) määritelmästä suoraan:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = x_{n-1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad (3)$$

jokaisella $n \geq 2$. Erityisesti pätee

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{n} \to 0, \ (*)$$

kun $n \to \infty$. Katsomalla yhtälöä (3) tapauksessa, jossa luku n on parillinen (korvataan luku n luvulla $2n$), saadaan

$$x_{2n} = x_{2n-1} - \frac{1}{2n} \qquad (4)$$

jokaisella n. Koska jono (x_{2n}) on nouseva, niin saadaan edelleen

$$x_{2n-1} = x_{2n} + \frac{1}{2n} \geq x_{2n} \geq x_2$$

jokaisella n. Vastaavasti yhtälöstä (4) saadaan

$$x_{2n} = x_{2n-1} - \frac{1}{2n} \leq x_{2n-1} \leq x_1$$

jokaisella n, sillä jono $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ on laskeva. Näin ollen jonot $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ ja $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ suppenevat tehtävänannon tiedon nojalla (tai lauseiden 4.8 ja 4.9 nojalla). Merkitään $a = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}$ ja $b = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$. Osoitetaan nyt $a = b$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n_1 \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$$|x_{2n-1} - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $n > n_1$ ja toisaalta havainnon (*) nojalla on olemassa $n_2 \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$$|x_{2n-1} - x_{2n}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $n > n_2$. Valitaan $n_\varepsilon = \max(n_1, n_2)$. Nyt saadaan kolmioepäyhtälön avulla

$$|x_{2n}-a| = |(x_{2n}-x_{2n-1})+(x_{2n-1}-a)| \leq |x_{2n}-x_{2n-1}|+|x_{2n-1}-a| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$. Siispä pätee $a = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ ja raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla on oltava $a = b$. Todetaan lopuksi, että alkuperäinen jono (x_n) suppenee lukuun a. Olkoon jälleen $\varepsilon > 0$. Nyt on olemassa luku $n' \in \mathbb{N}$, jolle

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

kun $n > n'$ ja n on pariton. Toisaalta on olemassa luku $n'' \in \mathbb{N}$, jolle

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

kun $n > n''$ ja n on parillinen. Valitaan $n'_\varepsilon = \max(n', n'')$. Tällöin on voimassa

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

kun $n > n'_\varepsilon$ (oli n parillinen tai pariton luku). Siispä pätee $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

4. Kerrataan aiempien ohjausten ja harjoitusten käsittelemättä jääneitä tai muuten kiinnostavia tehtäviä.