

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

Övning 9

23.11.-27.11. 2009

I dessa övningsuppgifter får du använda kända egenskaper av funktioner som används i skolan, såsom exempelvis deriveringsregeln för sinusfunktionen.

1. Definiera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = x|x|$. För vilka x existerar derivatan $f'(x)$? För vilka x existerar den andra derivatan $f''(x)$ eller den tredje derivatan $f'''(x)$?

2. Derivera

(a) $\sin^3 x^4$;

(b) $\sin^2(\sin^3 x^4)$;

(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}$.

3. Betrakta funktionen $f : (0, 2) \rightarrow (1, 37)$ för vilken $f(x) = x^5 + x^2 + 1$ för varje $x \in (0, 2)$. Varför har f en strängt växande (kontinuerlig) och deriverbar invers funktion $g : (1, 37) \rightarrow (0, 2)$? Bestäm $g'(3)$. Tips: beräkna först $f(1)$.

4. Anta att $f'(1) = 2$. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Tips: utöka det uttryck som undersöks till ett uttryck som innehåller differenskvoterna

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{och} \quad \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}.$$

5. Vi undersöker funktionen $f(x) = x^4$. Tolka ekvationen

$$(a+h)^4 = a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4$$

som ett uttryck för differentialen till f . Vilka delar utgör $f(a)$, $f'(a)h$ samt $h\varepsilon(h)$? Kan man finna derivatan till funktionen i punkten $x = a$ direkt från ovanstående ekvation?

6. Anta att $p > 0$. Visa att ekvationen $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ har högst två olika reella rötter. Tips: Beteckna vänstra sidan av ekvationen med $= f(x)$. Visa först med hjälp av den andra derivatan att f' är strängt växande. Tillämpa därefter Rolles sats mellan på varandra följande rötter till f . (Alternativ: tillämpa Rolles sats först som ovan på f och därefter på de rötter till f' som erhålls.)