INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 8
16.11.-20.11. 2009

1. Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2}$$

är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$.

2. Definiera funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom villkoret $f(x) = x^{999} + x^{666} + 333$. Visa med hjälp av Bolzanos sats att det finns $x \in (0, 1)$ för vilket gäller att $f(x) = 334$.

3. Vi betraktar funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ från föregående uppgift. Visa att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. Visa på basen av dessa observationer att det finns ett sådant tal $x \in \mathbb{R}$ att $f(x) = 777$.

4. Låt f vara funktionen från uppgift 2. Definiera

$$g(x) = \sqrt{f(x)^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Visa att det finns ett minsta tal bland de värden som funktionen g antar (dvs. g har ett minimum i $\mathbb{R}$).

5. Betrakta funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ som definieras av uttrycket i uppgift 2. Visa att f har en invers funktion som är kontinuerlig och strängt växande. (I vilket intervall är den inversa funktionen f^{-1} definierad?)

6. Anta att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion. Anta dessutom att $f(1) < f(3)$ och $f(2) > f(4)$. Visa att det finns två olika reella tal x och y för vilka $f(x) = f(y)$. (Tips. Det lönar sig att betrakta fallen $f(2) \leq f(3)$ och $f(3) < f(2)$ separat, samt använda Bolzanos sats. Denna uppgift utgör ett specialfall av ett resultat som säger att varje kontinuerlig injektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ måste endera vara strängt växande eller strängt avtagande!)