INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 7
9.11.-13.11. 2009

EXTRAPOÄNG !

För hemräkneövningarna: 4 poäng om du har räknat åtminstone 50 uppgifter, 3 poäng om du räknat 40 - 49 uppgifter, 2 poäng om du räknat 30 - 39 uppgifter samt 1 poäng om du räknat 20 - 29 av höstens uppgifter.

För handledningarna: 2 poäng om du från och med 9.11 deltar i handledningarna under 5 - 6 veckor och 1 poäng om du deltar i handledningarna under 3 - 4 veckor.

1. Beräkna

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+x^2+x}{x^2+7}$$

med hjälp av Sats 5.4 i kompendiet.

2. Visa utgående från definitionen att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-1}{x^3+1} = 3.$$

3. Visa utgående från definitionen att

$$\lim_{x\to 7-} \frac{x+7}{x-7} = -\infty.$$

4. Existerar $\lim_{x\to\infty} \cos x$? Du får använda kända egenskaper av kosinusfunktionen från skolan.

5. Anta att $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Definiera funktionerna $g_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ för varje $\alpha>0$ med villkoret $g_\alpha(x)=f(x)+\alpha x$. Anta att varje funktion g_α är strängt växande. Visa att f är en växande funktion.

6. Anta att $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ satisfierar villkoren $f(0)=0$ och $f'(0)=1$. Visa att det finns ett sådant $h>0$ att för varje x gäller: om $0<x<h$ så är $(1-\frac{1}{7})x < f(x) < (1+\frac{1}{7})x$. (Det lönar sig att tillämpa definitionen av gränsvärdet av en funktion på differenskvoten $E(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Om $|x|$ är tillräckligt litet (och $x\neq 0$) så är $|E(x)-1|<\frac{1}{7}\ \ldots$) Det lönar sig också att rita en bild !