INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 5
12.10.-16.10. 2009

I dessa övningsuppgifter fortsätter vi att arbeta med talföljder samt börjar att studera gränsvärdet av funktioner. Notera att kontinuitet och differentierbarhet är viktiga exempel på existensen av vissa gränsvärden.

1. Visa att
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n+3} = \infty.$$

2. Bestäm
$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{2n})^n$$
utgående från definitionen av talet e.

3. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet av en funktion att
$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$
Tolka resultatet som ett faktum om kontinuitet.

4. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet av en funktion att
$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \frac{1}{4}.$$
Tolka resultatet som ett faktum om derivatan.

5. (a) Visa att
$$\frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{(1+p)^2}{2p}.$$
(b) Visa att
$$\frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq 2\frac{(1+p)^2}{2p+1}.$$
(c) Visa att
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$
Tips: du kan ha nytta av (a)- och (b)- fallen, om du separat betraktar jämna och udda n. Du kan alternativt använda uppskattningen $2^n \geq n^2$ för $n \geq 4$ som visades på föreläsningarna.

6. Anta att $x_n \to \infty$ och $y_n \to a \in \mathbb{R}$, då $n \to \infty$, där $a > 0$. Visa att $x_n y_n \to \infty$ då $n \to \infty$. *Tips:* $y_n > \frac{a}{2}$ då n är tillräckligt stort. En extra fråga: vad kan hända om $a = 0$?

Kom ihåg: 1. kursprovet ordnas torsdag 22.10 kl 13-15. Torsdag 15.10. genomgång av gamla provuppgifter under andra föreläsningstimmen.
Obs: Handledningsövning 6 under perioden 19.10.-21.10.